~~1526~~ ...
A.gr.b. 1446/A
Euclides

Die
Planimetrie und Stereometrie
des
Euclides;
oder
die geometrischen Bücher der Elemente,
zum
öffentlichen und Privat-Gebrauche
herausgegeben
von

Joh. Jos. Ign. Hoffmann,

Königlich Bayerischem Hofrathe, Director des Königl. Lyceums und der Königl. Forstlehranstalt zu Aschaffenburg, Prof. der Mathematik u. Physik am Lyceum, erstem Prof. am Königl. Forstinstitute, Mitgliede der Wetterauischen Gesellschaft für die gesammte Naturkunde, der Kaiserl. Leopoldinisch-Carolinischen Academie der Naturforscher zu Bonn, der Senkenbergischen naturforschenden Gesellschaft zu Frankfurt a. M., der Gesellschaft zur Beförderung nützlicher Künste und ihrer Hülfswissenschaften daselbst und der Herzoglich Sachsen-Gothaischen und Meiningischen Societät der Forst- und Jagdkunde zu Dreisigacker.

Mit zehn Steindrucktafeln.

Mainz.
Bei Florian Kupferberg.

1832.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Vorwort.

Meine im Jahr 1829 erschienene Schrift:

Die geometrischen Bücher der Elemente des Euclides; als Leitfaden zum Unterrichte in der Elementar-Geometrie, mit vielen Anmerkungen herausgegeben von Joh. Jos. Ign. Hoffmann ꝛc. Mit sechzehn Steintafeln. Bei Florian Kupferberg. **XXXII.** u. 416 S. gr. 8.

ist von Sachverständigen beifällig aufgenommen worden. Die Darstellung des Textes nimmt darin 210 Seiten und jene der Anmerkungen 206 Seiten ein; so, daß jede dieser zwei Abtheilungen beinahe die Hälfte das ganzen Werkes beträgt.

Da nun dieser Text der Euclidischen Elemente ein für sich bestehendes vortreffliches Elementar-Werk der Geometrie bildet, welches mancher Kenner und Liebhaber der Mathesis allein besitzen mögte, so entstand der mehrfache Wunsch, jenen Text von diesen Anmerkungen, des geringern Preises und der hieraus ent-

stehenden größern Gemeinnützigkeit wegen, zu trennen und jedes von beiden als besondere Schrift herauszugeben. Verfasser uud Verleger des Werks sind um so geneigter, diesem Wunsche zu entsprechen, als auch weniger Bemittelte in den Stand gesetzt werden, sich eine gute Ausgabe der Geometrie des Euclides um billigen Preis zu verschaffen; oder auch, wenn sie schon im Besitze der Euclidischen Elemente sind, auf ähnliche Art die Anmerkungen zu den geometrischen Büchern zu erhalten, wenn ihnen diese Erläuterungen, Berichtigungen und Erweiterungen des Textes wünschenswerth sind, welche dem Lehrer vielfachen Stoff zum gedeihlichen Unterrichte bieten und dem Schüler zur Erleichterung seines Studiums dienen. Endlich kann auch das ganze Werk, wie bisher, ungetheilt bezogen werden.

Obwohl die Elemente des Euclides auf sehr mannigfaltige Weise erschienen sind, indem ältere und neuere Schriftsteller entweder die dreizehn oder fünfzehn Bücher allein in der Grundsprache, oder mit beigefügter lateinischen Uebersetzung, oder nur in der lateinischen, deutschen oder in einer andern Sprache herausgegeben; oder indem Andere lediglich die sechs ersten Bücher, nebst dem eilften und zwölften auf diese Weise behandelt, oder auch nur die vier ersten Bücher zum Gebrauch der ersten Anfänger zusammengestellt; oder endlich sie diese Elemente auf eigne Art freier bearbeitet und zu eigenthümlichen Lehrbüchern gestaltet haben: so sind, nach meinem Wissen, bloß die geometrischen

Bücher d. h. das I. II. III. IV. VI. XI und XII. Buch des Euclides, mit Ausschluß des V. Buchs, welches arithmetisch ist, noch nicht im Deutschen erschienen. Unter den Franzosen hat F. Peyrard (Les Élémens de Géometrie d'Euclide, traduits littéralement etc. à Paris, 1804) eine wohlgelungene Uebersetzung derselben geliefert.

Das fünfte Buch, welches die Lehre von den Verhältnissen und Proportionen enthält, ist der hier folgenden Bearbeitung der geometrischen Bücher nicht beigefügt worden, weil die geometrischen Lehren des VI. XI. und XII. Buchs nur der Elementar-Sätze aus dem Gebiete der Verhältnisse und Proportionen bedürfen, welche sich in jedem Handbuche der Arithmetik befinden. Demnach beschränkt sich diese Bearbeitung auf Darstellung der Euclidischen Planimetrie im I. II. III. IV. und VI. Buche und der Euclidischen Stereometrie im XI. und XII. Buche.

Der Herausgeber hat sich, ausser einigen der besten ältern Ausgaben, noch folgender neuern bedient:

1) Johann Friedr. Lorenz, Euclid's Elemente, fünfzehn Bücher, aus dem Griechischen. Halle, 1781.

2) *Fr. Peyrard*, Les Élémens de Géométrie d'Euclide. à Paris, 1804.

3) Joh. Carl Friedr. Hauff, Euclid's Elemente, das I. bis zum VI. samt dem XI. und XII. Buche u. s. f. Marburg, 1807. Zweite Auflage.

4) *J. Guilel Camerer*, **Euclidis Elementorum libri VI. priores graece et latine etc. T. I. Berolini, 1824. T. II. 1825.**

5) Carl Brandan Mollweide, Euclid's Elemente, fünfzehn Bücher von J. F. Lorenz. Halle 1824.

Die Wichtigkeit der geometrischen Elemente des Euclides, in Bezug auf gründliche, ächt wissenschaftliche Bildung des Geistes und in Hinsicht eines fruchtbaren Studiums der Geometrie und vieler andern Theile der Mathesis, ist zu allgemein anerkannt, als daß es einer weitern Ausführung derselben bedürfte.

Was die Art ihrer Bearbeitung betrifft, so war eine Hauptsorge des Herausgebers darauf gerichtet, den Geist der geometrischen Elemente auf recht faßliche, angenehme, auch den Anfänger feßlende Weise darzustellen.

Daher wurde eine solche Form dieser Darstellung gewählt, welche zwischen der, sehr schätzbaren, ganz wörtlichen Uebersetzung von Hauff und der sehr abgekürzten, allgemein geachteten Ausgabe von Lorenz ein schickliches Mittel hält.

Zur Erläuterung dieses dreifach verschiedenen Vortrags diene die Darstellung des 1. Satzes im I. Buche der Elemente nach Hauff, Lorenz und nach gegenwärtiger Ausgabe. Die Figur sehe man Taf. I. Fig. 1.

I. Nach Hauff.

1. Satz.

Aufgabe. Auf einer gegebenen begränzten geraden Linie ein gleichseitiges Dreyeck zu beschreiben.

Es sey AB eine gegebene begränzte gerade Linie, und man soll auf derselben ein gleichseitiges Dreyeck beschreiben.

Auflösung. Man beschreibe aus dem Mittelpunkte A, mit der Weite AB (3. Ford.) einen Kreis BCD, und aus dem Mittelpunkte B mit der Weite BA einen Kreis ACE, alsdann ziehe man von dem Punkte C, in welchem die beiden Kreise einander schneiden, nach den Punkten A und B die Linien CA, CB.

Beweis. Weil der Punkt A des Kreises CDB Mittelpunkt ist, so ist die Linie AC (15. Erkl.) der Linie AB gleich. Ferner, weil der Punkt B des Kreises CAE Mittelpunkt ist, so ist die Linie BC der BA gleich. Es ist aber gezeigt worden, daß auch die Linie AB*) der AB gleich sey; folglich sind die beyden CA, CB der dritten AB gleich. Dinge aber, die einem dritten gleich sind, sind einander selbst gleich; folglich ist auch die Linie CA der CB gleich, und mithin sind die drei Linien AC, AB, BC einander gleich. Dem=

---

*) Muß heißen AC, welches nicht unter den Druckfehlern bemerkt ist.

nach ist (24. Erkl.) das Dreyeck ABC gleichseitig, auch ist es auf der gegebenen begränzten geraden Linie AB beschrieben, was zu verrichten war.

II. Nach Lorenz.

Der 1. Satz.

Auf einer gegebenen begrenzten geraden Linie, AB, einen gleichseitigen Triangel zu beschreiben.

Aus dem Punkte A beschreibe (3. Post.) mit AB den Cirkel BCD, und aus dem Punkte B mit BA den Cirkel ACE. Vom Punkte C, in welchem sich beide Cirkel schneiden, ziehe (1. Post.) nach A, B, die geraden Linien CA, CB.

Da (15. Def.) AC = AB, und BC = BA, so ist (1. Ax.) AC = BC. Demnach ist AC = AB = BC, folglich (24. Def.) der auf AB beschriebene △ CAB gleichseitig.

III. Nach gegenwärtiger Ausgabe.

Der 1. Satz.

Aufgabe.

Auf eine gegebene begrenzte gerade Linie ein gleichseitiges Dreieck zu beschreiben.

Es sei (Fig. 1.) **AB** die gegebene begrenzte gerade Linie, auf welcher das gleichseitige Dreieck errichtet werden soll.

Auflösung.

Man beschreibe aus dem Puncte **A** mit **AB** den Kreis **BCD**, aus dem Puncte **B** mit **BA** den Kreis **ACE** (3. Ford.), ziehe vom Durchschnittspuncte **C** nach **A** die gerade Linie **CA** und nach **B** die gerade **CB** (1. Ford.)

Beweis.

Hier ist **AC** = **AB**, und
BC = **BA** (15. Erkl.) folglich auch
AC = **BC** (1. Gr.) daher ist
AC = **AB** = **BC** und folglich (24. Erkl.) das auf **AB** beschriebene Dreieck ein gleichseitiges.

Daß diese Darstellungsweise den Anfängern des geometrischen Studiums vorzüglich zusagend ist, weil sie Faßlichkeit mit Gründlichkeit verbindet, hat den Herausgeber ein sehr vieljähriger Vortrag der Geometrie an einer höhern Unterrichts-Anstalt gelehrt. Sehr zweckmäßig ist es, wenn bei dem Ausdrucke jedes Satzes, er sei Lehrsatz oder Aufgabe, die Hypothesis von der Thesis unterschieden und sowohl jene als diese durch klare Worte ausgesprochen wird. Ausserdem, daß der Anfänger hierdurch eine deutlichere Einsicht in den Sinn dieser Sätze erhält, ist dieses auch sehr erleich-

ternd zur Umkehrung der Theoreme, was den Ungeübten nicht selten Schwierigkeiten macht.

Mögte diese neue Bearbeitung, gleichwie sie aus Liebe zur Wissenschaft entsprungen ist, auch liebevoll aufgenommen und zur Verbreitung eines gründlichen Wissens eifrig benutzt werden!

Aschaffenburg im Januar 1832.

Joh. Jos. Ign. Hoffmann.

Einleitung.

I.

Euclides der Geometer wird bisweilen mit Euclides dem Philosophen für eine Person gehalten; jedoch mit Unrecht. Dieser, zu Megara geboren, war einer der ersten Schüler des Socrates und der Stifter einer philosophischen Secte, welche sich mehr durch scharfsinnige Sophistik als in wahrhaft gründlichen Forschungen ausgezeichnet hatte. Schon deshalb kann der Mathematiker Euclides, aus dessen Schriften die höchste Klarheit und Gründlichkeit hervorleuchtet, nicht mit jenem einerlei seyn. Ausserdem begab sich Plato, wie Diogenes Laërtius berichtet, uach dem Tode des Socrates in einem Alter von dreißig Jahren, mit einigen seiner Mitschüler zu dem Philosophen Euclides. Da nun Socrates Tod auf 393 vor Chr. Geb. fällt; Euclides der Geometer aber, nach Proclus, ein Zeitgenosse des ältern Ptolemeus gewesen ist, so lebte derselbe fast um ein Jahrhundert später und kann somit durchaus nicht mit dem Euclides von Megara verwechselt werden.

II.

Obwohl Euclides der Geometer, nach arabischen Geschichtschreibern, ein Sohn des Naucrates gewesen und in Tyrus geboren seyn soll, so sind diese Quellen nicht ächt, und es ist vielmehr sehr wahrscheinlich, daß er Griechenland und späterhin Alexandrien bewohnt hatte. Seine Studien soll er zu Athen unter den Schülern des Plato gemacht und seinen Aufenthalt zu Alexandrien, wegen des Wohlwollens des ältern Ptolemeus, gewählt haben. Pappus schildert ihn als einen sanften und bescheidenen Mann, welcher allen Förderern der mathematischen Lehre vorzüglich gewogen war. Diese Vorzüge hatte er vor Apollonius, welcher, nach des Pappus Zeugniß, eitel und geneigt war, die Verdienste Anderer zu schmälern. Daß Euclides kein Höfling gewesen ist, beweiset die Antwort, welche er dem Könige Ptolemeus auf die Frage gab: Ob es keinen bequemern Weg zum Studium der Geometrie gebe als den gewöhnlichen? indem er erwiederte: Es gibt selbst für Könige keinen solchen.

III.

Euclides verdankt vorzüglich seinen Elementen jenen Ruhm, der seinem Namen die Unsterblichkeit sichert. Er stellte in diesem classischen Werke die wichtigsten Wahrheiten der Geometrie und Arithmethik in systematischer Ordnung zusammen. Obwohl er nicht Selbsterfinder von allen ist, so mag doch wohl der größere Theil das Resultat seiner eignen Studien und der ausgezeichneten Kraft seines Geistes seyn. Die Anordnung des Ganzen liefert den sprechendsten Beweis von dem wissenschaftlichen Sinn des Euclides, indem fast jeder Satz als Folge des kurz vorhergehenden, oder als Grund eines bald folgenden erscheint. Wegen dieser Vortrefflichkeit der Darstellung nennt Hauff (in seiner Ausgabe des

Euclides. Marburg, 1807. S. IV. d. Vorr.) diese Elemente das Buch der Bücher, welches seit mehr als zweitausend Jahren das Lehrbuch für die Welt gewesen ist. Bezieht man diesen Ausdruck auf die in den Elementen herrschende Evidenz und wissenschaftliche Form, nach welcher sie allen übrigen Wissenschaften zum vorleuchtenden Muster dienen (ohne einer derselben etwas von ihrem eigenthümlichen Werthe entziehen zu wollen), so muß man ihm vollkommen beipflichten.

IV.

Obwohl ältere und neuere Mathematiker die Elemente, in Rücksicht der Anordnung ihrer Sätze u. dgl. im Ganzen verbessern wollten, so ist ihnen dieses nicht zur Zufriedenheit der Kenner gelungen. Was der gründliche Kästner vormals (Anfangsgründe der Arithm. u. s. f. Götting. 1800. S. 453) gesagt hatte: «Ueber die unzähligen geometrischen Lehrbücher kann ich nur sagen, daß, von dem eignen Werthe der Geometrie: Deutlichkeit und Gewißheit, jedes desto weniger besitzt, je weiter es sich von Euclids Elementen entfernt,» gilt auch noch heut zu Tage und kann leicht im Einzelnen nachgewiesen werden. Wie einer der größten Denker, der fast in allen wissenschaftlichen Fächern als Genie glänzende Leibnitz hierüber geurtheilt hatte, berichtet uns der scharfsinnige Wolf (Elem. Mathes. univ. T. V. pag. 36) indem er sagt: «Praeter nos alii etiam Mathematici agnoverunt, reformatores Elementorum *Euclidis* non fuisse in ausu suo satis felices; sed *Euclidis* Elementis palmam adhuc merito tribuendam esse. Memini hanc fuisse *Leibnitio* sententiam, cum me inviseret, dum Elementis Geometriae concinnandis operam darem ipsique referrem, me multiplici modo tentasse, ut eo ordine Elementa Geometriae digererem, quo usus est *Bernhardus Lamy*, sed nunquam

hoc fieri potuisse, nisi quaedam assumerem absque demonstratione, quae essent demonstranda, vel in demonstrando ac definiendo admitterem confuse tantummodo percepta.»

V.

Unter den ältern Schriftstellern ist Peter Ramus als Gegner der Elemente aufgetreten, deren Anwendung er mißbilligt hatte. Er gab eine Schrift (Scholae Mathematicae. Francof. ad Moenum. 1599. 4.) heraus, in deren dritter Abtheilung solche critische Bemerkungen über die fünfzehn Bücher des Euclides enthalten sind. Auch hat Ramus selbst ein, nach seiner Ansicht vollkommneres mathematisches Werk (Arithmeticae libri duo, Geometriae septem et viginti, a Lazaro Schonero recogniti et aucti. Francof. ad Moenum, 1599. 4.) herausgegeben, welches jedoch, nach Wolf's Zeugniß (Elem. Mathes. univ. Tom. V. pag 34 et 35. Halae 1741) den Euclidischen Elementen, sowohl an systematischer Verbindung der Sätze, als an Strenge der Beweise nachsteht.

Andere tadelten an den Elementen des Euclides das von ihm öfters benützte Princip der Congruenz der Figuren, z. B. zweier Dreiecke, welche zwei Seiten, nebst dem von ihnen eingeschloßnen Winkel gemein haben, welches sich auf das sogenannte Aufeinanderfallen ihrer homologen Seiten und Winkel gründet, und nannten dieses eine mechanische Beweisart, welche sich nicht mit der streng wissenschaftlichen Methode vertrüge. — Nun ist zwar unläugbar, daß man nicht von einem Aufeinanderfallen, sondern von dem Ineinanderfallen zweier Ebenen, zweier geraden Linien oder zweier Winkel sprechen soll, indem Ebenen, Winkel und Linien keine Dicke haben, und somit auch nicht aufeinander fallen können. Betrachtet man aber die Congruenz auf gehörige Weise, so

fällt jeder Einwurf gegen ihre Evidenz weg; man überzeugt sich, daß z. B. zwei Dreiecke, welche so in einanderliegen, daß sie nur ein einziges bilden, als vollkommen identisch d. h. nur als ein einziges erscheinen. Gerade diese wissenschaftlich-anschauliche Darstellung ist der eigenthümliche Character der geometrischen Grundlehren und hierdurch der Grund ihrer Evidenz. Daher haben solche Beweisarten, weit entfernt unwissenschaftlich zu seyn, noch vor andern den Vorzug eines höhern Maßes von Klarheit.

VI.

Wer die Elemente des Euclides als ein vortreffliches, im Ganzen bis zum heutigen Tage unübertroffnes Werk verehrt, will damit nicht behaupten, daß es auch im Einzelnen durchaus frei von Gebrechen sei. Seine wärmsten Vertheidiger haben dieses nicht geläugnet. Euclides war als Mensch, gleich allen andern, dem Sprichworte: Fehlen ist menschlich, unterworfen. Allein es muß seinem so sehr reichhaltigen Werke zu größter Ehre gereichen, daß man, durch eine, über zweitausend Jahre fortgesetzte Critik, dasselbe jetzt wie vormals als classisch erkennt und nur in Bezug auf einzelne Sätze gegründete Bemerkungen zu machen vermogte. So gehen also diese Elemente, durch sorgfältig wissenschaftliche Prüfung, immer mehr ihrer höhern Vollkommenheit entgegen. Gerade darin besteht auch der Zweck der hier folgenden neuen Ausgabe der geometrischen Bücher dieser Elemente, daß in Anmerkungen zu jedem Satze dasjenige beigebracht wird, was theils Andere verbessert haben, oder was der Herausgeber durch acht und zwanzigjährige öffentliche Vorträge und eignes Nachdenken als förderlich zum gründlichen Studium der Elementar-Geometrie gefunden hat.

VII.

Euclides hat seine Elemente in dreizehn Büchern vorgetragen, deren Inhalt sich (nach Lorenz in seiner Uebersetzung derselben. Halle, 1781) auf folgende Art am Bequemsten übersehen läßt. Das Ganze besteht aus vier Abtheilungen. Die erste handelt von den ebenen Figuren im ersten bis sechsten Buche; die zweite von den Zahlen im siebenten bis neunten Buche; die dritte von commensurabeln und incommensurabeln Größen im zehnten Buche und die vierte von den Körpern im eilften, zwölften und dreizehnten Buche.

Die nähere Uebersicht ist folgende:

I. Abtheilung. Von ebenen Figuren, in Bezug auf ihre Gleichheit und Aehnlichkeit.

I. Buch. Von Dreiecken und Parallelogrammen.

1. Von Dreiecken. Satz 1 bis 26.

2. Von den Parallellinien und Parallelogrammen. Satz 27 bis 36.

3. Von der Vergleichung der Dreiecke mit den Parallelogrammen. Satz 37 bis 48.

II. Buch. Von Rechtecken und Quadraten, welche durch Abschnitte gerader Linien entstehen, wenn diese auf bestimmte Art getheilt oder verlängert werden. Satz 1 bis 14.

III. Buch. Vom Kreise.

1. Von geraden Linien in und an dem Kreise. S. 1 bis 19.

2. Von Winkeln in und an dem Kreise. Satz 20 bis 36.

IV. Buch. Von der Construction der ebenen Figuren in einander und um einander.

1. Vom Dreiecke und Kreise. Satz 1 bis 5.

2. Vom Quadrate und Kreise. Satz 6 bis 9.

3. Vom regelmäßigen Vielecke und Kreise. S. 10 bis 16.

V. Buch. Von den Verhältnissen und Proportionen stetiger Größen überhaupt.

1. Von gleichvielfachen Größen. Satz 1 bis 6.

2. Von Proportionalgrößen. Satz 7 bis 15.

3. Von den Veränderungen der Proportionen. Satz 16 bis 25.

VI. Buch. Von den Proportionen stetiger Größen im Besondern.

1. Von den Proportionen bei Dreiecken und Parallelogrammen. Satz 1 bis 17.

2. Von der Aehnlichkeit der Figuren. Satz 18 bis 33.

II. Abtheilung. Von den Zahlen, worin alle Sätze von Zahlen bewiesen werden, welche im V. Buche von stetigen Größen bewiesen worden sind.

VII. Buch. Von den unstetigen Proportionen der Zahlen.

1. Von gleichvielfachen Zahlen. Satz 1 bis 10.

2. Von unstetigen Proportionalzahlen. Satz 11 bis 41.

VIII. Buch. Von der stetigen Proportion der Zahlen.

1. Von stetigen Proportionalzahlen. Satz 1 bis 13.

2. Von ähnlichen Flächen- und Körperzahlen. Satz 14 bis 27.

IX. Buch. Von einigen besondern Arten der Zahlen.

1. Von Quadrat- und Cubikzahlen. Satz 1 bis 10.

2. Von den Primzahlen. Satz 11 bis 20.

3. Von geraden und ungeraden Zahlen. Satz 21 bis 34.

4. Von den vollständigen Zahlen. Satz 35 bis 36.

III. Abtheilung. Von der Commensurabilität der Größen.

X. Buch. 1. Von commensurabeln und incommensurabeln Größen. Satz 1 bis 19.

2. Von rationalen und medialen Größen. S. 20 bis 36.

3. Von Irrationalgrößen aus dem Zusammensetzen. Satz 37 bis 73.

4. Von Irrationalgrößen durch Wegnahme. Satz 74 bis 111.

5. Von der Vergleichung aller vorhergehenden Irrationalgrößen. Satz 112 bis 117.

IV. Abtheilung. Von den geometrischen Körpern.

XI. Buch. 1. Von der Lage der Ebenen. Satz 1 bis 19.

2. Von den Körperwinkeln. Satz 20 bis 23.

3. Von den Parallelopipeden. Satz 24 bis 40.

XII. Buch. 1. Von den Pyramiden und Prismen. Satz 1 bis 9.

2. Von den Kegeln und Cylindern. Satz 10 bis 15.

3. Von der Kugel. Satz 16 bis 18.

XIII. Buch. 1. Von den, nach stetiger Proportion getheilten Linien. Satz 1 bis 6.

2. Von regelmäßigen Figuren. Satz 7 bis 12.

3. Von den fünf regelmäßigen Körpern. Satz 13 bis 18.

VIII.

Ausser diesen dreizehn Büchern gibt man bisweilen noch ein vierzehntes und fünfzehntes, als zu Euclids Elementen gehörig, an. Indessen sind sie kein nöthiger Bestandtheil derselben und man ist überzeugt, daß ihr Verfasser nicht Euclides, sondern der Geometer Hypsicles von Alexandrien war, der im zweiten Jahrhundert nach Chr. Geb. gelebt hatte. Da jedes dieser Bücher nur aus sieben Sätzen besteht, so können beide als ein Anhang zu den Elementen betrachtet werden, der aber nicht nothwendig zu ihrem Inhalte gehört. Daher sind auch diese zwei Bücher in vielen Ausgaben der Elemente nicht mit aufgenommen worden.

IX.

Ausser den Elementen hat Euclides noch Mehreres geschrieben. Sein wichtigstes Werk bestand aus drei

Büchern mit der Aufschrift: Porismata oder Porismen, welches aber verloren gegangen ist. Pappus, welcher berichtet, es habe sehr schwierige Aufgaben aus der Analysis der Alten aufgelöset, indem er sagte: collectio artificiosissima multarum rerum quae spectant ad analysin difficiliorum et generaliorum problematum, quorum ingentem copiam praebet natura, etc., hat sich bemüht, einiges Licht über dasselbe zu verbreiten; jedoch ohne befriedigende Resultate. Dem in der Geometrie der Alten hocherfahrnen Robert Simson war es vorbehalten, sich um diese Porismen des Euclides vorzügliches Verdienst zu erwerben.

Sein Werk heißt: *Roberti Simson*, Matheseos nuper in Acad. Glasguensi Professoris opera quaedam reliqua, scilicet I. Apollonii Pergaei de sectione determinata Libri II. restituti, duobus insuper libris aucti; II. Porismatum liber, quo doctrinam hanc veterum Geometrarum ab oblivione vindicare et ad captum hodiernorum adumbrare constitutum est; III. De Logarithmis liber; IV. De limitibus quantitatum et rationum, fragmentum; V. Appendix, pauca continens problemata, ad illustrandam praecipue veterum Geometrarum analysin. Nunc primum post Auctoris mortem in lucem edita, impensis quidem Phil. Comitis *Stanhope*, cura vero Jac. *Clow*, in ead. Acad. Prof. cui Auctor omnia sua manuscripta testamento legaverat... Glasguae, 1776, 4to.

Der Begriff vom Porisma wird zum Theil verschieden angegeben. Simson sagt: Porisma est propositio, in qua proponitur demonstrare rem aliquam, vel plures datas esse, cui, vel quibus, ut et cuilibet ex rebus innumeris, non quidem datis, sed quae ad ea quae data sunt, eandem habent rationem, convenire ostendendum est affectionem quandam communem in propositione descriptam. Daß diese Erklärung nicht besonders faßlich sei, bedarf keiner Erinnerung.

Klügel (Mathem. Wörterbuch, Art. Porisma) sagt: «Porisma ist ein Satz, in welchem ausgesagt wird, daß einem oder mehreren gegebenen (unveränderlichen) Dingen, so wie auch unzählig vielen Dingen, die zwar nicht gegeben werden, aber zu den gegebenen Dingen eine bestimmte Relation haben, eine gewisse gemeinschaftliche Beschaffenheit zukomme.» Oder: «Porisma ist eine Aufgabe, worin gefodert wird, etwas Bestimmtes, das mit einem Unbestimmten nach gewissem Gesetze verknüpft sei, zu finden.»

Ein Beispiel aus Robert Simson (wozu man sich leicht die Zeichnung entwerfen wird) sei folgendes. — Wenn ein Kreis der Lage und Größe nach und eine gerade Linie ausser ihm der Lage nach gegeben ist, so wird ein Punct gegeben seyn, der die Eigenschaft hat, daß, wenn irgend eine gerade, durch ihn gezogene Linie sowohl jenen Kreis als jene gerade Linie schneidet, das aus ihren Segmenten gebildete Rechteck immer von bestimmter unveränderlicher Größe ist. — Der verlangte Punct ist jener, in welchem ein von dem Mittelpuncte des Kreises auf die gegebene gerade Linie gezognes Loth die Peripherie dieses Kreises durchschneidet, wovon der Beweis durch die entstehenden ähnlichen Dreiecke leicht gefunden wird.

X.

Ferner war Euclides Verfasser einer Schrift, welche den Titel führt: Die Data des Euclides. Auch der Begriff dieser Data ist verschieden angegeben worden. Klügel (Mathem. Wörterb. Th. I. S. 706) sagt folgendes: «Mittelst dieser Sätze sucht man bei der Auflösung einer Aufgabe, was aus den gegebenen Dingen folgt, was aus diesem wieder hergeleitet wird u. s. w., bis daß man findet, daß das, was in der Aufgabe zu leisten verlangt wird, gegeben sei. Oder

man geht von dem Gesuchten als gegeben aus, und sucht, wie man durch Größen und Verhältnisse, deren eines durch das andere gegeben wird, auf etwas Gegebenes komme, um von diesem wieder auf das Gesuchte zurückzugehen.

Beispiele. 1) Wenn zwei oder mehrere Größen zu einander gegebene Verhältnisse haben, und wenn sie zu andern Größen gegebene, wenn auch nicht einerlei Verhältnisse haben, so werden diese andern Größen auch gegebene Verhältnisse zu einander haben. 2) Wenn in einem Dreiecke ein Winkel gegeben ist, so hat das Rechteck von den ihn einschließenden Seiten zu dem Dreiecke ein gegebenes Verhältniß.»

Diese Data sind, mit den übrigen Schriften des Euclides, von Dasypodius zu Straßburg i. J. 1571 zuerst griechisch und lateinisch herausgegeben worden. Später, i. J. 1625, erschien eine besondere Ausgabe mit lateinischer Uebersetzung und mit Anmerkungen von Claudius Hardy, welche Gregory seiner griechischen Ausgabe des Euclides, Oxford, 1703 beigefügt hat. Durch Robert Simson ist später eine englische Uebersetzung geliefert worden, mit Verbesserungen und Abänderungen des Textes. Diese Ausgabe ist dann i. J. 1780 von Joh. Christ. Schwab unter dem Titel: Euclides Data, verbessert und vermehrt von Robert Simson, aus dem Englischen übersetzt und mit einer Sammlung geometrischer, nach der analytischen Methode der Alten aufgelößter Probleme begleitet worden. Im Jahre 1825 erschien: Euclides Data, nach dem Griechischen mit Robert Simsons Zusätzen herausgegeben von Jul. Fried. Wurm. Berlin, 8. Mit 2 Steintafeln, welche Schrift als wohlfeile Handausgabe zu empfehlen ist. — Ueberhaupt werden diese Data als ein schätzbares Ueberbleibsel der Geometrie der Alten anerkannt.

XI.

Ausserdem ist Euclides noch als Verfasser folgender Schriften bekannt.

1) Vier Bücher über die Kegelschnitte, von welchen Pappus sagt, daß sie diese Lehre sehr erweitert hatten und einen großen Theil der vier ersten Bücher des Apollonius über diesen Gegenstand bildeten;

2) Zwei Bücher über die geometrischen Orte auf Oberflächen, wovon man nur weiß, daß sie die Linien von doppelter Krümmung zum Gegenstande hatten;

3) Noch führt Proclus eine Schrift des Euclides unter dem Titel: De Divisionibus an, ohne den Gegenstand ihres Inhaltes näher zu bezeichnen. Vielleicht war es eine Abhandlung über die Theilung der Figuren zum theoretischen oder practischen Gebrauche.

4) In einer Schrift De Phaenomenis hat Euclides geometrische Beweise über die Erscheinungen des Auf- und Untergangs der Gestirne gegeben. Sowohl diese, als auch sein Werk über die Musik, unter dem Titel: Isagoge seu Introductio musica, in zwei Büchern, worin er vorzüglich die Musik der Alten behandelt, ist uns überliefert worden.

5) Endlich schreibt man dem Euclides noch zwei Bücher über die Optik zu, von welchen es aber ungewiß ist, ob sie ihn wirklich zum Verfasser haben, obwohl Proclus und Theon bezeugen, daß er über diesen Gegenstand geschrieben habe. Eben so wenig ist es wahrscheinlich, daß Euclides Urheber der Schrift: De Levi et Ponderoso sei.

XII.

Es gibt wenige Werke, welche so viele Ausgaben erlebten, in so vielerlei Sprachen übersetzt wurden und auf so vielerlei Art bearbeitet worden sind, als die Elemente des Euclides.

Die Wichtigkeit des Stoffs und die Vortrefflichkeit seiner Darstellung rechtfertigen dieses. Eine ausführliche Anzeige davon würde ein eignes Werk bilden. Daher soll hier nur Einiges beigebracht werden.

Theon von Alexandrien schrieb zuerst einen Commentar über die dreizehn Bücher der Elemente und erlaubte sich mancherlei Aenderungen im Texte.

Proclus commentirte mit großer Ausführlichkeit über das erste Buch der Elemente.

Unter den Orientalen verdient Nassir-Eddin, ein berühmter persischer Geometer, welcher um das Jahr 1250 lebte, genannt zu werden, dessen schätzbarer Commentar i. J. 1594 in einer schönen arabischen Ausgabe erschienen ist. Auch haben die Hebräer Moses Aben-Tibon, Isaac ben-Honain u. A. Uebersetzungen geliefert, welche sich in einigen Bibliotheken vorfinden.

Auf ähnliche Art erschienen im Laufe der Zeit Ausgaben und Bearbeitungen der Elemente in der lateinischen, deutschen, französischen, italienischen, spanischen, englischen, holländischen, schwedischen, dänischen Sprache, und es wird, ausser der h. Schrift, nicht leicht ein Buch geben, welches weiter auf der Erde verbreitet worden ist, als diese Elemente.

Eine sehr vollkommne Ausgabe des Grundtextes ist die von David Gregory unter dem Titel: Euclidis quae supersunt omnia, ex recensione Dav. Gregorii. Oxon. 1703. Fol., welche auch eine lateinische Uebersetzung enthält.

Die erste gedruckte lateinische Ausgabe ist die von dem berühmten Buchdrucker Erhard Ratdold zu Augsburg, welche i. J. 1482 zu Venedig in Fol. erschienen ist. Kästner hat von ihr in einem Schreiben an den Cardinal Quirini, Leipzig 1750, nähere Nachricht gegeben. Sie ist nach Campani's Uebersetzung aus dem Arabischen bearbeitet.

Unter allen Herausgebern und Commentatoren der Elemente, hat sich der scharfsinnige Jesuit Clavius vorzüglich berühmt gemacht. Seine Schrift heißt: Euclidis Elementorum libri XV. Accessit liber XVI. de solidorum regularium cujuslibet intra quodlibet comparatione. Omnes perspicuis demonstrationibus, accuratisque scholiis illustrati, nunc quartò editi, ac multorum rerum accessione post primam editionem locupletati. Auctore *Christophoro Clavio*, Bambergensi è societate Jesu. Francofurti, ex officina Typographica Nicolai Hoffmanni. Sumptibus Jonae Rhodii. MDCVII. 8. Der erste Band der vor uns liegenden Ausgabe enthält 671 Seiten Text und Commentar, dann 128 Seiten theils Vorerinnerungen; meist aber die ausführliche Darstellung aller einzelnen Sätze in den Elementen, was allerdings eine bequeme Uebersicht gewährt. Uebrigens findet man in diesem Bande die VI. ersten Bücher. Der zweite Band gibt sodann die folgenden IX. Bücher nebst einem XVI. Buche De solidorum regularium cujuslibet intra quodlibet comparatione, in 680 Seiten. — Die frühere dritte Ausgabe ist i. J. 1591 zu Cölln in Fol. erschienen. Der Commentar des Clavius zeichnet sich durch Gründlichkeit und Ausführlichkeit (welche jedoch bisweilen etwas zu weit zu gehen scheint) vor Andern sehr rühmlich aus. Die erste Ausgabe erschien zu Rom i. J. 1574 in zwei Octavbänden.

Pierre Herigone hat in seinem Cursus Mathematicus nova, brevi et clara methodo demonstratus per notas reales et universales, citra usum cujuscunque idiomatis intellectu faciles. Paris. 1634 die XIV. Bücher der Elemente lateinisch und französisch, mit vielen Abkürzungen und Zeichen herausgegeben, und war, nach Kästner's Meinung, der erste, welcher sich dieses Mittels bediente, um eine Reihenfolge von Schlüssen bequemer als durch Worte darzustellen.

Von Barrow ist bekannt: Euclidis Elementorum Libri XV, breviter demonstrati opera *Js. Barrow*. Cantabr, 1675, wovon i. J. 1676 zu Osnabrück ein Nachdruck erschienen ist. Durch den Gebrauch arithmetischer Zeichen ist die Schrift, gegen frühere Ausgaben, sehr compendiös geworden.

Zum Besten der ersten Anfänger hatte man schon längst besondere Ausgaben der ersten sechs Bücher veranstaltet; z. B. Euclidis Elementorum Libri 6.... a *Mauritio Steinmetz*. Lips. 1577, worin die Sätze griechisch und lateinisch, jedoch nur die ersten drei Bücher mit Beweisen vorkommen. Desgleichen: *Jac. Peletarii* in Euclidis Elementa Geometrica Demonstrationum Libri rex. 1610. apud Joann. Tornaesium. 4to, welche die Sätze griechisch und lateinisch und ihre Beweise enthalten.

XIII.

Von spätern Ausgaben bemerken wir folgende:

Euclid's Elemente, fünfzehn Bücher, aus dem Griechischen übersetzt von Joh. Fried. Lorenz. Halle, 1781, 8. mit eingedruckten Holzschnitten. Ein sehr brauchbares Werk und besonders wegen Kürze und bequemer Uebersicht der Darstellung zu empfehlen. Es erschienen mehrere Ausgaben, deren neueste die von Carl Brandan Mollweide ist. Halle, 1824. 8. XXXII. und 444 Seiten.

Euclid's Elemente; das erste bis zum sechsten, sammt dem eilften und zwölften Buche. Aufs neue aus dem Griechischen übersetzt von Joh. Carl Fried. Hauff. Zweite verbesserte, mit einer neuen Parallelentheorie vermehrte Auflage. Marburg, 1807. LIII und 369 S. 8. Mit vielen eingedruckten Holzschnitten. Verdient als wohlgelungene wörtliche Uebersetzung des Urtextes vorzügliche Erwähnung.

Les Eléméns de Géometrie d'Euclide, traduits littéralement, et suivis d'un Traité du Cercle, du Cylindre, du Cône et de la Sphère; de la mesure des Surfaces et des Solides, avec des notes. Par *F. Peyrard,* Bibliothécaire de l'École Polytechnique. A Paris. 1804. XV. et 573 p. 8. mit acht Kupfertafeln. Diese sehr empfehlungswerthe Schrift enthält das I. II. III. IV. VI. XI. und XII. Buch der Elemente in einer wohlgelungenen, klaren, wörtlichen Uebersetzung des Grundtextes. Die Supplemente sind ganz nach der Methode des Euclides abgefaßt und die Noten enthalten zweckmäßige Bemerkungen zum Texte. Auch verdient der Druck vorzüglichen Beifall.

Die sechs ersten Bücher, nebst dem eilften nnd zwölften der Elemente des Euclides. Mit Verbesserung der Fehler, wodurch Theon und Andere diese Bücher entstellt haben, und den Elementen der ebenen und syhärischen Trigonometrie. Von Robert Simson, M. D. ehemals Professor der Mathematik zu Glasgow. Aus dem Englischen übersetzt von Math. Reder.... Herausgegeben von J. H. Jos. Niesert, Pastor zu Welen u. s. f. Paderborn, b. Jos. Wesener. 1806. XVI. u. 620 S. gr. 8. Mit vielen eingedruckten Holzschnitten und 5 Steintafeln. Dieses, durch sehr gutes Papier und guten Druck ausgezeichnete Werk scheint nicht die verdiente Aufnahme gefunden zu haben, obwohl die critischen Anmerkungen und Zusätze (S. 641 bis 748) von Wichtigkeit sind.

Eine, durch Correctheit des griechischen Textes und der zur Seite stehenden lateinischen Uebersetzung, durch eine Menge sehr lehrreicher Anmerkungen, durch eigens beigefügte Abhandlungen über folgende Sätze: I, 29; I, 47; I, 47, 48; II, 12, 13; III, 16; V, Erkl. 5 u. 7; VI, Erkl. 5, und durch guten Druck und gutes Papier ganz vorzügliche Ausgabe ist folgende: Euclidis Elementorum Libri sex priores, graece et latine, commentario e scriptis veterum ac recentiorum mathema-

ticorum et Pfleidereri maxime illustrati. Edidit *Jo. Guilelmus Camerer,* Gymnasii Stuttgardiani Rector. Berolini, 1824. Tom. I. Complectens Libr. I. — III. XXX. et 482. pag. 8vo cum 10 tabulis. Tom. II. Complectens Libr. IV — VI. cum 6 tabulis. Berolini 1825. 379 pag.

Von frühern guten Ausgaben verdienen noch folgende bemerkt zu werden.

a) Die lateinische von Bärmann. Leipzig, 1743. 8.

b) Die lateinische von Tacquet. Rom, 1745. 8.

c) Die lateinische von Robert Simson. Glasgow, 1756. 4.

d) Die französische von König. à la Haye, 1758. 4.

Wer umständlichere Nachricht von den verschiedenen Ausgaben der Elemente verlangt, findet sie in folgenden Schriften:

Scheibel's Einleitung zur mathematischen Bücherkenntniß I. Stück.

Fabricius Biblioth. Graec. Lib. III. cap. 14.

Matthias Bose Schediasma litterarium, quo contenta Elem. Eucl. enunciat, simul de variis editionibus post Fabricium disserit. Lips. 1737.

Abrah. Gotth. Kästner's Geschichte der Mathematik I. Band, S. 248 u. f.

J. F. Montucla (de l'institut nationale de France) Histoire des Mathématiques, dans laquelle on rend compte de leurs progrès depuis leur origine jusqu'à nos jours; où l'on expose le tableau et le développement des principales découvertes dans toutes les parties des Mathématiques, les contestations qui se sont élevées entre le Mathématiciens, et les principaux traits de la vie de plus célèbres. Nouvelle édition, considérablement augmentée et prolongée jusque vers l'époque actuelle. A Paris. An VII. Tome I, VIII et 739 p. 4to. Mit zwölf Kupfertaf. Tome II. 717 p. mit 14 Kupfertaf. Ein sehr reichhaltiges, vortreffliches Werk.

Joseph Wolfg. Müller Auserlesene mathematische Bibliothek u. s. w. Nürnberg, 1820. 8. XXII u. 266 S. — Dessen Repertorium der mathematischen Literatur, in alphabetischer Ordnung. 144 S. Ist sehr zu empfehlen.

Die
geometrischen Bücher
der
Elemente des Euclides.

Das erste Buch der Elemente des Euclides.

Dieses Buch handelt:

1. Von den Dreiecken. Satz 1—26.

2. Von den Parallellinien und den sich hierauf gründenden Eigenschaften der Dreiecke und Parallelogramme. Satz 27—40.

3. Von der Vergleichung der Dreiecke mit den Parallelogrammen. Satz 41—48.

Erklärungen des ersten Buchs.

1. Ein Punct ist dasjenige, was keine Theile hat.

2. Die Linie ist eine Länge ohne Breite.

3. Die Grenzen der Linie sind Puncte.

4. Eine gerade Linie ist jene, welche zwischen den in ihr befindlichen Puncten einerlei Lage hat.

5. Eine Fläche ist dasjenige, was nur Länge und Breite hat.

6. Die Grenzen der Fläche sind Linien.

7. Eine ebene Fläche (oder Ebene) ist jene, welche zwischen den in ihr befindlichen geraden Linien gleichförmig liegt.

8. Ein ebener Winkel ist die Neigung zweier Linien gegen einander, die sich in einer Ebene berühren, ohne eine gerade Linie zu bilden.

9. Sind die Linien, welche den Winkel bilden, gerade Linien, so heißt der Winkel ein geradliniger.

10. Steht eine gerade Linie so auf einer andern, daß sie mit ihr gleiche Nebenwinkel bildet, so heißt sie senkrecht (oder lothrecht, oder perpendiculär) auf der andern, und jeder der beiden gleichen Winkel heißt ein rechter Winkel.

11. Ein stumpfer Winkel heißt jener, der größer ist, als ein rechter.

12. Ein spitzer Winkel aber ein solcher, der kleiner als ein rechter ist.

13. Die Grenze heißt dasjenige, was das Aeußerste eines Dinges ist.

14. Eine Figur ist dasjenige, was von einer oder mehreren Grenzen umschlossen ist.

15. Der Kreis ist eine ebene Figur, welche von einer einzigen krummen Linie, dem Umkreise oder der Peripherie, so eingeschlossen ist, daß alle gerade Linien, welche aus einem innerhalb derselben befindlichen Puncte an die Grenze gezogen werden, einander gleich sind.

16. Dieser Punct heißt Mittelpunct des Kreises.

17. Der Durchmesser des Kreises ist jede gerade Linie, welche durch seinen Mittelpunct an beide Seiten der Peripherie geht, und auch den Kreis halbirt.

18. Der Halbkreis ist eine von dem Durchmesser und von dem durch diesen abgeschnittenen Kreisbogen umschlossene Figur.

19. Der Abschnitt des Kreises (oder das Segment) ist jenes Stück desselben, welches von einer geraden Linie und einem Kreisbogen umschlossen ist.

20. Geradlinige Figuren sind jene, welche von geraden Linien umschlossen sind.

21. Dreiseitige Figuren (oder Dreiecke) jene, welche von drei;

22. Vierseitige Figuren (oder Vierecke) jene, welche von vier;

23. Vielseitige Figuren (oder Vielecke) jene, welche von mehr, als vier geraden Linien umschlossen sind.

24. Unter den dreiseitigen Figuren heißt jene ein gleichseitiges Dreieck, welche drei gleiche Seiten hat.

25. Ein gleichschenkeliges Dreieck heißt jenes, welches nur zwei gleiche Seiten hat.

26. Ein ungleichseitiges Dreieck ist dasjenige, welches drei ungleiche Seiten hat.

27. Ferner heißt unter den Dreiecken jenes ein rechtwinkeliges, welches einen rechten Winkel hat;

28. Jenes ein stumpfwinkeliges, welches einen stumpfen, und

29. Jenes ein spitzwinkeliges Dreieck, welches drei spitze Winkel hat.

30. Unter den vierseitigen Figuren heißt jene ein Quadrat, welche gleichseitig und rechtwinkelig ist.

31. Ein längliches Viereck oder Rechteck heißt jene, welche zwar rechtwinkelig, aber nicht gleichseitig ist.

32. Ein Rhombus oder eine Raute jene, welche gleichseitig, aber nicht rechtwinkelig ist.

33. Eine Rhomboide jene, worin die entgegenstehenden Seiten und Winkel einander gleich sind, ohne gleichseitig oder rechtwinkelig zu seyn.

34. Alle übrige vierseitige Figuren werden Trapeze genennt.

35. Parallele Linien sind jene gerade Linien in einerlei Ebene, welche, so weit sie auch nach beiden Seiten verlängert werden, doch an keiner Seite zusammentreffen.

Forderungen.

1. Von jedem Puncte nach jedem andern eine gerade Linie zu ziehen.

2. Eine begrenzte gerade Linie stetig in gerader Richtung zu verlängern.

3. Aus jedem Puncte mit jedem Abstande einen Kreis zu beschreiben.

Grundsätze.

1. Dinge, welche einem dritten gleich sind, sind auch einander selbst gleich.

2. Wenn man Gleiches zu Gleichem hinzusetzt, so sind auch die Ganzen gleich.

3. Wenn Gleiches von Gleichem weggenommen wird, so sind die Reste gleich.

4. Wenn man Gleiches dem Ungleichen beifügt, so sind die Ganzen ungleich.

5. Wenn man Gleiches vom Ungleichen wegnimmt, so sind auch die Reste ungleich.

6. Wenn zwei Dinge einander gleich sind, so sind auch ihre Doppelten einander gleich.

7. Wenn zwei Dinge einander gleich sind, so sind auch ihre Hälften einander gleich.

8. Wenn Dinge einander decken, so sind sie auch einander gleich.

9. Das Ganze ist größer, als sein Theil.

10. Alle rechte Winkel sind einander gleich.

11. Wenn zwei gerade Linien von einer dritten so durchschnitten werden, daß die beiden innern, an einerlei Seite der schneidenden Linie liegenden Winkel, kleiner als zwei rechte sind, so treffen jene zwei gerade Linien, genugsam verlängert, an eben der Seite zusammen.

12. Zwei gerade Linien schließen keinen Raum ein.

Der 1. Satz.

Aufgabe.

Auf eine gegebene begrenzte gerade Linie ein gleichseitiges Dreieck zu beschreiben.

Es sei (Fig. 1.) AB die gegebene begrenzte gerade Linie, auf welcher das gleichseitige Dreieck errichtet werden soll.

Auflösung.

Man beschreibe aus dem Puncte A mit AB den Kreis BCD, aus dem Puncte B mit BA den Kreis ACE (3. Ford.), ziehe vom Durchschnittspuncte C nach A die gerade Linie CA und nach B die gerade CB (1. Ford.)

Beweis.

Hier ist AC = AB und
BC = BA (15. Erkl.) folglich auch
AC = BC (1. Gr.) daher ist
AC = AB = BC und folglich (24. Erkl.) das auf AB beschriebene Dreieck ein gleichseitiges.

Der 2. Satz.

Aufgabe.

An einen gegebenen Punct eine gerade Linie zu legen, welche einer gegebenen geraden gleich ist.

Es sei A (Fig. 2.) der gegebene Punct, BC die gegebene gerade Linie, und man soll an A eine gerade Linie legen, welche der BC gleich ist.

Auflösung.

Man ziehe (1. Ford.) von A nach B die gerade Linie AB, beschreibe über dieselbe (1. Satz) das gleichseitige Dreieck DAB, und verlängere die Linien DA und DB nach E und F (2. Ford.) Dann beschreibe man aus B mit BC (3. Ford.) den Kreis CGH, und aus D mit DG den Kreis GKL.

Beweis.

Hier ist DL = DG (15. Erkl.) und
DA = DB (24. Erkl.) folglich wird
AL = BG (3. Gr.) Nun ist aber
BC = BG (15. Erkl.) folglich auch
AL = BC (1. Gr.)

Der 3. Satz.

Aufgabe.

Wenn zwei ungleiche gerade Linien gegeben sind, so soll von der größern ein Stück abgeschnitten werden, welches der kleinern gleich ist.

Es seien (Fig. 3.) AB und C die gegebenen ungleichen Linien, AB die größere, C die kleinere, und man soll von AB einen Theil wegnehmen, welcher so groß als C ist.

Auflösung.

Man lege an A die AD = C (2. S.) und beschreibe aus A mit AD den Kreis DEF.

Beweis.

Da AD = C und auch (15. Erkl.)
AD = AE, so muß auch (1. Gr.) die von AB weggenommene Linie AE der gegebenen Linie C gleich seyn.

Der 4. Satz.

Lehrsatz.

Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten des einen, einzeln genommen, zweien Seiten des andern gleich sind, und der von ihnen eingeschlossene Winkel beiderseits gleich ist, so ist auch die dritte Seite des einen der dritten Seite des andern gleich, und es sind die ganzen Dreiecke, so wie auch jene Winkel, welche gleichen Seiten gegenüberliegen, einander gleich.

Es sei in den Dreiecken (Fig. 4.) ABC und DEF die Seite AB = DE, dann AC = DF und ∢ BAC = ∢ EDF, so ist auch ∢ B = ∢ E, ∢ C = ∢ F, und BC = EF, auch △ ABC = △ DEF.

Beweis.

Man lege das Dreieck ABC so über das Dreieck DEF, daß A auf D, und AB auf DE fällt, so muß auch, da AB = DE ist, B auf E fallen. Da nun ∢ BAC = ∢ EDF, so fällt AC auf DF und da AC = DF, auch C auf F. Nun fällt nach dem Vorigen auch B auf E, folglich BC auf EF. Denn fiele BC über oder unter EF, so würden die geraden Linien BC und EF einen Raum einschließen, was (12. Gr.) unmöglich ist. Daher ist BC = EF, △ ABC = △ DEF; ∢ ABC = ∢ DEF, und ∢ ACB = ∢ DFE (8. Gr.)

Der 5. Satz.

Lehrsatz.

In jedem gleichschenkeligen Dreiecke sind die Winkel an der Grundlinie, und, wenn die gleichen Schenkel verlängert werden, auch die Winkel unter der Grundlinie einander gleich.

Es sei (Fig. 5.) BAC ein gleichschenkeliges Dreieck, worin AB = AC ist, und sowohl AB nach D, als AC nach E verlängert wird, so ist ∢ ABC = ∢ ACB, und auch ∢ CBD = ∢ BCE.

Beweis.

Man nehme auf BD den willkührlichen Punct F, mache auf AE die AG = AF (3. S.) und ziehe FC und GB.

Da hier AF = AG, ferner
AC = AB und auch
∢ A = ∢ A, so ist (4. S.)
FC = GB, ferner
∢ ACF = ∢ ABG und
∢ AFC = ∢ AGB. Nun ist aber
AF = AG, dann
AB = AC, und daher
BF = CG (3. Gr.) Folglich ist in den Dreiecken FBC, GCB, BF = CG und FC = GB, sowie auch
∢ AFC = ∢ AGB. Daher
∢ BCF = ∢ CBG, und
∢ FBC = ∢ GCB (4. S.)
Da nun ∢ ABG = ∢ ACF und
∢ CBG = ∢ BCF, so ist auch
∢ ABC = ∢ ACB (3. Gr.)

Der 6. Satz.

Lehrsatz.

Wenn in einem Dreiecke zwei Winkel einander gleich sind, so sind auch die Seiten, welche diesen Winkeln gegenüber liegen, einander gleich.

Es sei ABC (Fig. 6.) das gegebene Dreieck, worin ∢ ABC = ∢ ACB, so ist auch AC = AB.

Beweis.

Wären die Seiten AB und AC ungleich, so müßte eine größer als die andere seyn. Wäre nun AB > AC, so nehme man DB = AC (3. S.) und ziehe DC.

Nun wäre in den Dreiecken ABC und DBC
BD = CA, ferner
BC = BC und auch

$\sphericalangle DBC = \sphericalangle ACB$. Folglich müßte
$\triangle DBC = \triangle ABC$ seyn (4. S.),
welches aber unmöglich ist (9. Gr.)

Der 7. Satz.

Lehrsatz.

Wenn auf einer geraden Linie in ihren Endpuncten zwei gerade Linien so aufgestellt sind, daß sie in einem Puncte zusammentreffen, und wenn zwei andere gerade Linien, welche, einzeln genommen, den ersten gleich sind, in eben diesen Endpuncten aufgestellt werden, so können sie in keinem andern Puncte an eben dieser Seite zusammentreffen.

Es seien (Fig. 7.) aus den Endpuncten der geraden Linie AB die geraden Linien AC und BC, und dann auch die geraden Linien AD und DB, wovon $AC = AD$ und $BC = BD$ ist, nach der nämlichen Seite hin aufgestellt, so können die beiden letzteren nicht in einem andern Puncte als der Punct C ist, und z. B. in D zusammentreffen.

Beweis.

Wenn man die Linie CD zieht, so ist wegen
$AC = AD$ nun auch
$\sphericalangle ADC = \sphericalangle DCA$ (5. S.) Folglich
$\sphericalangle ADC > \sphericalangle DCB$, daher um so mehr
$\sphericalangle CDB > \sphericalangle DCB$. Nun ist aber
$CB = DB$, folglich auch
$\sphericalangle CDB = \sphericalangle DCB$ (5. S.), welches dem Vorigen, daß $\sphericalangle CDB > \sphericalangle DCB$ ist, widerspricht.

Der 8. Satz.

Lehrsatz.

Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten des einen, einzeln genommen, zweien Seiten des andern gleich

sind, und es ist noch die dritte Seite des ersten der dritten Seite des andern gleich, so ist auch in beiden jener Winkel, welcher von den gleichen Seiten gebildet wird, gleich groß.

Es sei in den Dreiecken (Fig. 8.) ABC und DEF, AB = DE und AC = DF, auch sei BC = EF, so ist auch ∢ BAC = ∢ EDF.

Beweis.

Man bringe das △ ABC so über das △ DEF, daß B auf E und BC längs EF fällt. Da nun BC = EF, so fällt auch C in F. Nun ist aber auch BA = ED und CA = FD; daher muß A in D fallen (7. S.) und folglich auch BA in ED und CA in FD, und es ist ∢ BAC = ∢ EDF (8. Gr.)

Der 9. Satz.

Aufgabe.

Einen gegebenen geradlinigen Winkel in zwei gleiche Theile zu theilen.

Es sei (Fig. 9.) BAC der gegebene Winkel, und es soll derselbe halbirt werden.

Auflösung.

Man nehme in AB den willkührlichen Punct D, und mache AE = AD (3. S.), ziehe DE, und beschreibe auf derselben das gleichseitige △ DFE (1. S.) Wird nun AF gezogen, so ist ∢ BAC durch AF halbirt.

Beweis.

Da hier DA = EA, auch
DF = EF und endlich
AF = AF ist, so muß auch
∢ DAF = ∢ EAF seyn. (8. S.)

Der 10. Satz.

Aufgabe.

Eine gegebene begrenzte gerade Linie zu halbiren.

Es sei AB (Fig. 10.) die gegebene gerade Linie, und man soll diese halbiren.

Auflösung.

Man beschreibe auf AB das gleichseitige Dreieck ACB (1. S.), halbire ∢ACB durch CD (9. S.), so wird die Linie AB in D halbirt seyn.

Beweis.

Weil hier AC = CB, auch
CD = CD und endlich
∢ACD = ∢BCD ist, so muß auch
AD = BD seyn. (4. S.)

Der 11. Satz.

Aufgabe.

Aus einem, in einer gegebenen geraden Linie gegebenen Puncte eine senkrechte Linie auf sie zu errichten.

Es sei (Fig. 11.) AB die gegebene Linie und C der in ihr gegebene Punct, so soll aus ihm ein Loth auf AB errichtet werden.

Auflösung.

Man nehme in AC den willkührlichen Punct D, mache in CB die CE = CD (3. S.), beschreibe auf DE das gleichseitige △DFE (1. S.) und ziehe die FC, so steht diese senkrecht auf AB.

Beweis.

Da hier CD = CE, ferner
CF = CF und endlich auch
DF = EF ist, so muß auch
∢DCF = ∢ECF (8. S.) und folglich auch die CF senkrecht auf AB seyn. (10. Erkl.)

Der 12. Satz.

Aufgabe.

Von einem ausserhalb einer gegebenen unbegrenzten geraden Linie gegebenen Puncte ein Loth auf sie zu ziehen.

Es sei AB (Fig. 12.) die gegebene gerade Linie, C der Punct ausser ihr, und man soll von C auf AB eine senkrechte Linie ziehen.

Auflösung.

Man nehme auf der andern Seite von AB einen beliebigen Punct D, beschreibe aus C mit der Weite CD den Kreis EFG, halbire GE in H (10. S.), und ziehe die Linie CH, so ist diese senkrecht auf AB.

Beweis.

Wenn man die Linien CG und CE zieht, so ist

GH = EH, ferner

CH = CH und endlich

GC = EC (15. Erkl.) Folglich

∡ GHC = ∡ EHC. (8. S.) Daher denn die CH senkrecht auf AB. (10. Erkl.)

Der 13. Satz.

Lehrsatz.

Wenn eine gerade Linie so auf einer andern aufgestellt ist, daß sie mit ihr zwei Winkel bildet, so sind diese Winkel entweder, einzeln genommen, zwei Rechte, oder sie sind zusammengenommen zweien Rechten gleich.

Es sei auf der geraden CD (Fig. 13.) die gerade BA so aufgestellt, daß sie mit ihr die Winkel DBA und ABC bildet, so ist entweder jeder dieser Winkel ein Rechter, oder sie betragen zusammen zwei rechte Winkel (oder 2R).

Beweis.

Wenn der Winkel DBA dem Winkel ABC gleich ist, so sind sie zwei Rechte (10. Erkl.) Sind sie aber ungleich, so errichte man die BE aus B auf DC lothrecht (11. S.), so ist sowohl DBE, als EBC ein rechter Winkel. (10. Erkl.)

Nun ist ∡ CBE = ∡ CBA + ∡ ABE und

∡ EBD = ∡ EBD, folglich

∡ CBE + ∡ EBD = ∡ CBA + ∡ ABE + ∡ EBD. (3. Gr.)

Weil nun $\sphericalangle ABD = \sphericalangle DBE + \sphericalangle EBA$, so ist $\sphericalangle ABD + \sphericalangle CBA = \sphericalangle DBE + \sphericalangle EBA + \sphericalangle ABC$. Daher auch $\sphericalangle ABD + \sphericalangle CBA = \sphericalangle CBE + \sphericalangle EBD = 2R$. (1. Gr.)

Der 14. Satz.

Lehrsatz.

Wenn mit einer geraden Linie in einem Puncte derselben zwei andere, nicht nach der nämlichen Seite liegende gerade Linien zwei neben einander liegende Winkel bilden, welche zweien Rechten gleich sind, so liegen diese beiden geraden Linien in einer einzigen geraden.

Wenn (Fig. 14.) mit der geraden Linie AB die zwei geraden Linien BC und BD die neben einander liegenden Winkel ABC und ABD bilden, und diese zusammengenommen zwei rechte Winkel betragen, so muß BD und BC in einer geraden Linie CBD liegen.

Beweis.

Wäre CBD keine gerade Linie, so sei es irgend eine andere z. B. CBE. Hier wäre nun (13. S.)

$\sphericalangle ABC + \sphericalangle ABE = 2R$. Allein es ist auch
$\sphericalangle ABC + \sphericalangle ABD = 2R$ nach der Annahme; also
$\sphericalangle ABC + \sphericalangle ABE = \sphericalangle ABC + \sphericalangle ABD$ (1. Gr.), allein
$\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABC$, folglich wäre
$\sphericalangle ABE = \sphericalangle ABD$ (3. Gr.), welches aber unmöglich ist. (9. Gr.)

Der 15. Satz.

Lehrsatz.

Wenn sich zwei gerade Linien durchschneiden, so bilden sie gleiche Scheitelwinkel.

Wenn sich (Fig. 15.) die Linien AB und CD im Puncte E schneiden, so ist $\sphericalangle AED = \sphericalangle CEB$, und $\sphericalangle AEC = \sphericalangle DEB$.

Beweis.

Da hier $\sphericalangle CEA + \sphericalangle AED = 2R$, und
$\sphericalangle AED + \sphericalangle DEB = 2R$ (13. S.), so ist auch
$\sphericalangle CEA + \sphericalangle AED = \sphericalangle AED + \sphericalangle DEB$ (1. Gr.)
Nun ist aber $\sphericalangle AED = \sphericalangle AED$, folglich auch
$\sphericalangle CEA = \sphericalangle DEB$. (3. Gr.)
Ganz auf ähnliche Art wird bewiesen, daß $\sphericalangle CEB = \sphericalangle AED$ ist.

Zusatz.

Hieraus geht hervor, daß alle Winkel, welche rings um den gemeinschaftlichen Durchschnittspunct mehrerer geraden Linien liegen, zusammengenommen $4R$ betragen.

Der 16. Satz.

Lehrsatz.

Wenn man die Seite eines Dreiecks verlängert, so ist der Aussenwinkel größer, als jeder seiner innern Gegenwinkel.

Wenn ABC (Fig. 16.) das gegebene Dreieck und BCD die verlängerte Seite BD ist, so muß der Aussenwinkel ACD größer, als jeder seiner zwei Gegenwinkel CBA und BAC seyn.

Beweis.

Man halbire AC in E (10. S.) ziehe BE und verlängere sie, bis $EF = EB$ ist. Auch ziehe man FC.

Da nun hier $BE = EF$, ferner
$AE = EC$ und auch
$\sphericalangle AEB = \sphericalangle CEF$, (15. S.) so ist auch
$\sphericalangle BAE = \sphericalangle FCE$ (4. S.)
Nun ist aber $\sphericalangle ACD > \sphericalangle ECF$ (9. Gr.) Daher auch
$\sphericalangle ACD > \sphericalangle BAC$.

Auf ähnliche Art kann auch BC halbirt und bewiesen werden, daß der Winkel BCG, das heißt der Winkel ACD, (15. S.) größer als der Winkel CBA ist.

Der 17. Satz.

Lehrsatz.

In jedem Dreiecke sind jede zwei Winkel zusammengenommen kleiner, als zwei Rechte.

Es sei ABC (Fig. 17.) ein gegebenes Dreieck, so sind jede zwei Winkel desselben zusammen kleiner, als zwei Rechte.

Beweis.

Wenn man die Seite BC nach D verlängert, so ist

$\sphericalangle ACD > \sphericalangle ABC$ (16. S.) oder

$\sphericalangle ABC < \sphericalangle ACD$. Da nun

$\sphericalangle ACB = \sphericalangle ACB$, so ist auch

$\sphericalangle ABC + \sphericalangle ACB < \sphericalangle ACD + \sphericalangle ACB$ (4. Gr.)

Allein $\sphericalangle ACD + \sphericalangle ACB = 2R$ (13. S.), daher auch

$\sphericalangle ABC + \sphericalangle ACB < 2R$.

Auf ganz ähnliche Art wird die Behauptung auch von

$\sphericalangle BAC + \sphericalangle ACB$ und von

$\sphericalangle CAB + \sphericalangle ABC$ bewiesen.

Der 18. Satz.

Lehrsatz.

In jedem Dreiecke steht der größern Seite auch der größere Winkel gegenüber.

Es sei in dem Dreiecke ACB (Fig. 18.) die Seite AC > AB, so ist auch der Winkel ABC größer als der Winkel ACB.

Beweis.

Da AC > AB, so nehme man AD = AB (3. S.) und ziehe BD, wodurch $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ABD$ ist. (5. S.) Nun ist aber auch $\sphericalangle ADB >$ ACB (16. S.), daher

$\sphericalangle ABD >$ ACB. Allein

$\sphericalangle ABC >$ ABD, folglich um so mehr

$\sphericalangle ABC > \sphericalangle ACB$.

Der 19. Satz.

Lehrsatz.

In jedem Dreiecke steht dem größern Winkel auch die größere Seite gegenüber.

Es sei in dem Dreiecke ABC (Fig. 19.) der Winkel ABC $> \sphericalangle$ BCA, so ist auch die Seite AC $>$ AB.

Beweis.

Wäre die Seite AC nicht größer als AB, so müßte entweder

AC $=$ AB oder

AC $<$ AB seyn. Im ersten Falle wäre auch $\sphericalangle$ ABC $= \sphericalangle$ ACB (5. S.) Und im zweiten Falle müßte $\sphericalangle$ ABC $<$ $\sphericalangle$ ACB seyn (18. S.), welches beides der Annahme, daß $\sphericalangle$ ABC $> \sphericalangle$ ACB ist, widerspricht.

Der 20. Satz.

Lehrsatz.

In jedem Dreiecke sind je zwei Seiten zusammengenommen größer, als die dritte.

Es sei (Fig. 20.) ABC das gegebene Dreieck, so sind je zwei Seiten desselben zusammengenommen größer, als die dritte.

Beweis.

Wenn man die Seite BA über A verlängert, AD $=$ AC macht und DC zieht, so ist wegen

AD $=$ AC nun auch

$\sphericalangle$ ACD $= \sphericalangle$ ADC (5. S.) folglich

$\sphericalangle$ BCD $> \sphericalangle$ ADC und daher auch

BD $>$ BC (19. S.) Es ist aber

BD $=$ BA $+$ AC, daher auch

BA $+$ AC $>$ BC.

Auf ähnliche Art wird bewiesen, daß AB $+$ BC $>$ AC und daß BC $+$ CA $>$ AB ist.

Der 21. Satz.

Lehrsatz.

Wenn zwei von den Endpuncten einer Dreiecksseite ausgehende gerade Linien sich innerhalb des Dreiecks durchschneiden, so sind sie zusammengenommen kleiner, als die beiden übrigen Seiten des Dreiecks; bilden aber einen größern Winkel, als diese.

Es seien aus den Puncten B und C (Fig. 21.) der Dreiecksseite BC die Linien BD und CD gezogen, welche innerhalb des Dreiecks ABC sich in D schneiden, so ist $BD + DC < BA + AC$ und $\sphericalangle BDC > \sphericalangle BAC$.

Beweis

Wenn man die Linie BD bis E verlängert, so ist im Dreiecke ABE

$BA + AE > EB$ (20. S.) Da nun
$EC = EC$, so muß auch

$BA + AC > BE + EC$ seyn.

Ferner ist im Dreiecke CDE

$CE + ED > CD$ (20. S.) Und da
$DB = DB$, so ist auch
$CE + EB > CD + DB$, folglich um so mehr
$BA + AC > CD + DB$.

Weil nun $\sphericalangle BDC > BEC$ (16. S.) und
$\sphericalangle BEC > \sphericalangle BAC$ (16. S.) so ist um so mehr

$\sphericalangle BDC > \sphericalangle BAC$.

Der 22. Satz.

Aufgabe.

Aus drei geraden Linien, welche dreien gegebenen einzeln genommen gleich, und wovon je zwei zusammen größer als die dritte sind, ein Dreieck zu bilden.

Es seien (Fig. 22.) A, B und C die drei gegebenen Linien, und es sei $A + B > C$, ferner $A + C > B$ und $B + C > A$. Man soll mit diesen drei Seiten ein Dreieck bilden.

Auflösung.

Man ziehe eine gerade Linie DE von unbestimmter Länge, nehme $DF = A$, $FG = B$ und $GH = C$. Nun beschreibe man aus F mit FD den Kreis DKL und aus G mit GH den Kreis HLK, ziehe sodann die geraden Linien KF und KG, so ist KGF das verlangte Dreieck.

Beweis.

Hier ist nämlich $FD = FK$ und $GH = GK$ (15. Erkl.) Da aber $FD = A$ und $GH = C$, so muß auch
$FK = A$ und
$KG = C$ seyn. (1. Gr.)
Nun ist auch $FG = B$. Daher sind die drei Seiten des Dreiecks KGF den gegebenen Linien A, B und C, einzeln genommen gleich.

Der 23. Satz.

Aufgabe.

An einer gegebenen geraden Linie und einem in ihr gegebenen Puncte einen geradlinigen Winkel zu bilden, welcher einem gegebenen gleich ist.

Es sei AB (Fig. 23.) die gegebene gerade Linie, A der in ihr gegebene Punct und DCE der gegebene Winkel.

Man soll aus A eine Linie AF ziehen, welche mit AB den Winkel DCE bildet.

Auflösung.

Man nehme sowohl auf CE als auf CD einen willkührlichen Punct D und E, und ziehe DE. Nun bilde man ein Dreieck AFG, worin $AF = CD$, $AG = CE$ und $FG = DE$ ist (22. S.), so wird auch $\sphericalangle FAG = \sphericalangle DCE$ seyn.

Beweis.

Da in den beiden Dreiecken ECD und GAF die Seite
$CE = AG$, ferner
$CD = AF$ und endlich

ED = GF ist, so muß auch
∢ECD = ∢GAF seyn (8. S.)

Der 24. Satz.

Lehrsatz.

Wenn in zwei Dreiecken die zwei Seiten des einen, einzeln genommen, den zwei Seiten des andern gleich sind; aber der von jenen eingeschlossene Winkel größer, als der von diesen gebildete ist, so ist auch die dritte Seite des ersten Dreiecks größer als die dritte Seite des andern.

Es seien (Fig. 24.) BAC und EDF die gegebenen Dreiecke, worin BA = ED, AC = DF und ∢BAC > ∢EDF ist, so muß auch BC > EF seyn.

Beweis.

Da ∢BAC > ∢EDF, so mache man ∢EDG = ∢BAC (23. S.) so wie auch DG = AC = DF und ziehe die Linien GE und GF.

Da nun hier AB = DE, ferner
AC = DG und endlich
∢BAC = ∢EDG, so ist auch
BC = EG (4. S.) Nun ist aber
DG = DF und daher
∢DFG = ∢DGF (5. S.) folglich auch
∢DFG > ∢EFG und daher um so mehr noch
∢EFG > ∢EGF und also auch
EG > EF (19. S.) oder
BC > EF.

Der 25. Satz.

Lehrsatz.

Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten des einen, einzeln genommen, zweien Seiten des andern gleich sind; aber die dritte Seite des ersten größer ist,

als die dritte Seite des andern, so ist auch der dieser größern Seite gegenüberstehende Winkel größer, als der Winkel, welcher der kleinern Seite gegenüberliegt.

Es seien (Fig. 25.) ABC und DEF die zwei Dreiecke, worin $AB = DE$, $AC = DF$ und $BC > EF$ ist, so muß $\sphericalangle BAC > \sphericalangle EDF$ seyn.

B e w e i s.

Wäre hier $\sphericalangle BAC$ nicht größer, als $\sphericalangle EDF$, so müßte entweder

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle EDF \text{ oder}$$
$$\sphericalangle BAC < \sphericalangle EDF \text{ seyn.}$$

Im ersteren Falle wäre nun auch $BC = EF$ (4. S.) und im zweiten Falle wäre $BC < EF$ (24. S.) welches beides der Annahme, daß $BC > EF$ ist, widerspricht.

D e r 26. S a t z.

L e h r s a t z.

Wenn in zwei Dreiecken zwei Winkel des einen, einzeln genommen, zweien Winkeln des andern gleich sind, und es ist noch eine Seite des einen einer Seite des andern gleich, sie mag an den gleichen Winkeln oder einem derselben gegenüber liegen, so sind auch die übrigen Seiten in den beiden Dreiecken, einzeln genommen, einander gleich, und der dritte Winkel des einen ist dem dritten Winkel des andern gleich.

Es seien (Fig. 26.) ABC und DEF die zwei Dreiecke, worin $\sphericalangle ABC = \sphericalangle DEF$, und $\sphericalangle BCA = \sphericalangle EFD$, auch sei

für den ersten Fall

$BC = EF$, so ist auch $AB = DE$, $AC = DF$, und $\sphericalangle BAC = \sphericalangle EDF$.

B e w e i s.

Wären die Seiten AB und DE ungleich, so sei z. B. $AB > DE$. Man mache $GB = DE$ (3. S.) und ziehe GC.

Da nun hier BG = ED, ferner
BC = EF und auch
∡ GBC = ∡ DEF, so ist
∡ BCG = ∡ EFD (4. S.) Nun ist aber
∡ BCA = ∡ EFD nach der Annahme,
folglich wäre ∡ BCA = ∡ BCG, welches unmöglich ist (9. Gr.)

Da nun ferner AB = DE und
BC = EF, endlich auch
∡ ABC = ∡ DEF, so ist
AC = DF und
∡ BAC = ∡ EDF (4. S.) Es sei nun

für den zweiten Fall

AB = DE, so ist auch AC = DF, BC = EF und ∡ BAC = ∡ EDF.

Beweis.

Denn wenn BC und EF ungleich wären, so müßte eine größer, als die andere und z. B. BC > EF seyn. Man nehme daher BH = EF und ziehe AH.

Da nun hier BH = EF, auch
AB = DE und endlich
∡ ABC = ∡ DEF, so ist (4. S.)
∡ BHA = ∡ EFD. Nun war aber nach der Annahme ∡ BCA = ∡ EFD; daher wäre auch ∡ BHA = ∡ BCA, welches unmöglich ist (16. S.)

Da nun auch BC = EF, ferner
AB = DE und endlich
∡ ABC = ∡ DEF, so ist auch
AC = DF und
∡ BAC = ∡ EDF (4. S.)

Der 27. Satz.

Lehrsatz.

Wenn zwei gerade Linien so von einer dritten geschnitten werden, daß die Wechselwinkel einander gleich sind, so müssen die zwei geraden Linien mit einander parallel seyn.

Es werden die zwei geraden Linien AB und CD (Fig. 27.) von der dritten EF so geschnitten, daß die Wechselwinkel AEF und EFD einander gleich sind, so muß AB mit CD parallel seyn.

B e w e i s.

Wäre AB nicht mit CD parallel, so müßten sie, nach einer Seite hin genugsam verlängert, einmal zusammenlaufen. Gesetzt, dieß geschehe in G, so entstände ein Dreieck EFG, in welchem $\sphericalangle AEF > \sphericalangle EFD$ wäre (16. S.), welches der Annahme, daß $\sphericalangle AEF = \sphericalangle EFD$ ist, widerspricht.

Auf ähnliche Art wird gezeigt, daß die geraden Linien BA und DC, wenn sie über A und C verlängert werden, sich auch hier nie durchschneiden können.

D e r 28. S a t z.

L e h r s a t z.

Wenn zwei gerade Linien so von einer dritten geschnitten werden, daß der äussere Winkel seinem innern, an einerlei Seite liegenden Gegenwinkel gleich ist, oder daß die beiden innern, an einerlei Seite liegenden Winkel zusammen zweien Rechten gleich sind, so müssen die zwei geraden Linien auch parallel seyn.

Es werden die zwei geraden Linien AB und CD (Fig. 28.) so von der dritten EF geschnitten, daß der äussere Winkel EGB seinem innern GHD gleich ist, oder daß die beiden innern Winkel BGH und GHD zusammen zwei Rechte betragen, so ist AB mit CD parallel.

B e w e i s.

I. Da nach der Annahme $\sphericalangle EGB = \sphericalangle GHD$
und auch $\sphericalangle EGB = \sphericalangle AGH$ (15. S.),
so ist (1. Gr.) $\sphericalangle AGH = \sphericalangle GHD$ und es muß die Linie AB mit CD parallel seyn (27. Satz.)

II. Da nach der Annahme
$\sphericalangle BGH + \sphericalangle GHD = 2R$, und auch
$\sphericalangle AGH + \sphericalangle BGH = 2R$ (13. S.), so ist auch
$\sphericalangle BGH + \sphericalangle GHD = \sphericalangle AGH + \sphericalangle BGH$ (1. Gr.)

Da nun $\angle BGH = \angle BGH$, so ist

$\angle AGH = \angle GHD$ (3. Gr.)

Und es muß daher AB mit CD parallel seyn (27. S.)

Der 29. Satz.

Lehrsatz.

Wenn zwei gleichlaufende Linien von einer dritten geraden Linie geschnitten werden, so sind die hierdurch entstehenden Wechselwinkel einander gleich; auch ist der äussere seinem innern Gegenwinkel gleich, und die beiden innern, an einerlei Seite liegenden Winkel sind zusammengenommen zweien Rechten gleich.

Es seien die Linien AB und CD (Fig. 29.), welche von der dritten EF in G und H geschnitten werden, mit einander parallel, so ist $\angle AGH = \angle GHD$, ferner

$\angle EGB = \angle GHD$ und endlich

$\angle BGH + \angle GHD = 2R$.

Beweis.

I. Wenn $\angle AGH$ und $\angle GHD$ nicht unter sich gleich wären, so sei z. B.

$\angle AGH > \angle GHD$. Da nun

$\angle BGH = \angle BGH$, so müßte auch

$\angle AGH + \angle BGH > \angle GHD + \angle BGH$ seyn (4. Gr.)

Nun ist aber $\angle AGH + \angle BGH = 2R$ (13. S.) Daher wäre $\angle GHD + \angle BGH < 2R$, und die Linien AB und CD müßten, gehörig verlängert, einmal zusammentreffen (11. Gr.) und wären daher nicht mit einander parallel (35. Erkl.), welches der Annahme, daß sie gleichlaufende sind, widerspricht.

II. Da hier $\angle AGH = \angle GHD$ und auch

$\angle AGH = \angle EGB$ (15. S.), so muß auch

$\angle EGB = \angle GHD$ seyn (1. Gr.)

III. Da ferner $\angle EGB = \angle GHD$ und auch

$\angle BGH = \angle BGH$, so ist (2. Gr.)

$\angle EGB + \angle BGH = \angle GHD + \angle BGH$.

Nun ist aber ∢EGB + ∢BGH = 2R (13. S.)
Folglich auch ∢GHD + ∢BGH = 2R (1. Gr.)

Der 30. Satz.

Lehrsatz.

Zwei gerade Linien, welche mit der nämlichen dritten geraden parallel sind, müssen auch unter sich selbst gleichlaufend seyn.

Es sei (Fig. 30.) sowohl die gerade AB, als auch die gerade CD mit der geraden EF parallel, so ist auch AB mit CD gleichlaufend.

Beweis.

Wenn die drei Linien AB, EF und CD von der dritten MN geschnitten werden, so ist, weil AB und EF gleichlaufend sind,

∢AGH = ∢GHF (29. S.)

Nun ist aber auch, weil EF mit CD parallel ist,

∢GHF = ∢GKD (29. S.)

Daher muß auch ∢AGH = ∢GKD (1. Gr.) und folglich AB mit CD parallel seyn (27. S.)

Der 31. Satz.

Aufgabe.

Durch einen gegebenen Punct eine gerade Linie zu ziehen, welche mit einer gegebenen geraden gleichlaufend ist.

Es sei A (Fig. 31.) der gegebene Punct, BC die gegebene gerade Linie, und man soll durch A eine mit BC gleichlaufende bilden.

Auflösung.

Man nehme in BC den willkührlichen Punct D, ziehe AD und lege an A den Winkel DAE, welcher dem Winkel ADC gleich ist (23. S.), dann verlängere man die EA nach F hin.

Beweis.

Da hier nach der Construction ∢EAD = ∢ADC ist, so muß auch die gerade EF mit der geraden BC parallel seyn (27. S.)

Der 32. Satz.

Lehrsatz.

Wenn man die Seite eines Dreiecks verlängert, so ist der Aussenwinkel so groß, als seine zwei innere Gegenwinkel zusammengenommen. Auch sind die drei innern Winkel des Dreiecks zusammen zweien Rechten gleich.

Es sei ABC (Fig. 32.) das gegebene Dreieck und BC nach D verlängert, so ist $\sphericalangle ACD = \sphericalangle CAB + \sphericalangle ABC$. Ferner ist auch $\sphericalangle ABC + \sphericalangle BCA + \sphericalangle CAB = 2R$.

Beweis.

I. Wenn man durch C die Linie CE mit BA gleichlaufend zieht (31. S.), so ist

$\sphericalangle BAC = \sphericalangle ACE$ (29. S.) und ferner

$\sphericalangle ABC = \sphericalangle ECD$ (29. S.), daher auch

$\sphericalangle BAC + \sphericalangle ABC = \sphericalangle ACE + \sphericalangle ECD$. Allein

$\sphericalangle ACE + \sphericalangle ECD = \sphericalangle ACD$. Daher auch

$\sphericalangle BAC + \sphericalangle ABC = \sphericalangle ACD$ (2. Gr.)

II. Da hier $\sphericalangle BAC + \sphericalangle ABC = \sphericalangle ACD$, auch

$\sphericalangle ACB = \sphericalangle ACB$, so ist auch

$\sphericalangle BAC + \sphericalangle ABC + \sphericalangle ACB = \sphericalangle ACD + \sphericalangle ACB$.

(2. Gr.) Allein $\sphericalangle ACD + \sphericalangle ACB = 2R$ (13. S.) Daher auch $\sphericalangle BAC + \sphericalangle ABC + \sphericalangle ACB = 2R$ (1. Gr.)

Der 33. Satz.

Lehrsatz.

Wenn zwei gerade Linien unter sich gleich und parallel sind, so sind auch jene gerade Linien, welche ihre Endpuncte an einerlei Seite verbinden, einander gleich und parallel.

Es seien (Fig. 33.) die Linien BA und DC einander gleich und parallel, so sind auch die Verbindungslinien BD und AC einander gleich und parallel.

Beweis.

Wenn man die gerade BC zieht, so ist, weil BA mit DC gleichlaufend ist,

∠ ABC = ∠ BCD (29. S.) Da nun
AB = DC und auch
BC = BC, so muß
AC = DB und
∠ ACB = ∠ DBC seyn (4. S.) Daher ist auch AC mit BD gleichlaufend (27. S.)

Der 34. Satz.

Lehrsatz.

In jedem Parallelogramme sind die gegenüberstehenden Seiten und die gegenüberstehenden Winkel einander gleich. Auch wird dasselbe von der Diagonale halbirt.

Es sei (Fig. 34.) BACD das Parallelogramm und BC seine Diagonale, so ist BA = DC, BD = AC, ∠ DBA = ∠ DCA, ∠ BDC = ∠ BAC, und △ ABC = △ BCD.

Beweis.

I. Da sowohl AB mit CD, als auch BD mit AC parallel ist, so muß
∠ ABC = ∠ BCD und
∠ ACB = ∠ CBD seyn. (29. S.)
Nun ist auch BC = BC, daher
AB = CD (26. S.)
AC = BD und
∠ BAC = ∠ BDC.
Auch ist, weil ∠ ABC = ∠ BCD und
∠ CBD = ∠ ACB, nun auch
∠ ABC + ∠ CBD = ∠ BCD + ∠ ACB (2. Gr.)
Folglich ∠ ABD = ∠ ACD.

II. Da ferner AB = CD, dann
BC = BC, und endlich
∠ ABC = ∠ BCD, so ist auch
△ ABC = △ CBD (4. S.)

Der 35. Satz.

Lehrsatz.

Wenn Parallelogramme auf einerlei Grundlinie und zwischen einerlei Parallellinien stehen, so sind sie einander gleich.

Es seien die Parallelogramme (Fig. 35.) ADCD und EFCB auf der nämlichen Grundlinie BC und zwischen den nämlichen Parallelen AF und BC, so ist das Parallelogramm ADCB dem Parallelogramme EFCB gleich.

Beweis.

Hier ist BC = AD, ferner
BC = EF (34. S.) Folglich
AD = EF (1. Gr.) Da nun
DE = DE, so ist
AE = DF (2. Gr.) Nun ist ferner
AB = DC (34. S.) und
∢ FAB = ∢ FDC (29. S.) Daher
△ ABE = △ DCF (4. S.) Da nun
△ EDG = △ EDG, so wird
ABGD = EGCF (3. Gr.), es ist aber
△ GBC = △ GBC, folglich auch
ABCD = EBCF (2. Gr.)

Der 36. Satz.

Lehrsatz.

Parallelogramme, welche auf gleichen Grundlinien und zwischen einerlei Parallelen stehen, sind einander gleich.

Es seien die Parallelogramme (Fig. 36.) ABCD und EFGH auf gleichen Grundlinien BC und FG, und zwischen den Parallelen AH und BG, so sind diese zwei Parallelogramme einander gleich.

Beweis.

Wenn man die Linien BE und CH zieht, so ist

BC = FG auch
FG = EH (34. S.) Daher denn
BC = EH (1. Gr.)

Da nun auch BC mit EH gleichlaufend ist, so muß auch EB der CH gleich und parallel seyn (33. S.) Daher ist EHCB ein Parallelogramm, und

ABCD = EBCH (35. S.), allein
EFGH = EBCH (35. S.) Daher
ABCD = EFGH (1. Gr.)

Der 37. Satz.

Lehrsatz.

Wenn zwei Dreiecke auf einerlei Grundlinie und zwischen einerlei Parallelen stehen, so sind sie einander gleich.

Es seien (Fig. 37.) die Dreiecke ABC und DBC auf einerlei Grundlinie BC und zwischen einerlei Parallelen AD und BC, so ist △ ABC = △ DBC.

Beweis.

Wenn man die gerade AD über A und D verlängert, durch B die BE mit CA und durch C die CF mit BD parallel zieht (31. S.), so sind die Parallelogramme EBCA und DBCF einander gleich (35. S.). Nun ist aber auch Dreieck ABC die Hälfte des Parallelogramms EACB und das Dreieck DBC die Hälfte des Parallelogramms DBCF (34. S.), folglich müssen auch diese Dreiecke einander gleich seyn. (7. Gr.)

Der 38. Satz.

Lehrsatz.

Wenn zwei Dreiecke auf gleichen Grundlinien und zwischen einerlei Parallellinien stehen, so sind sie einander gleich.

Es seien (Fig. 38.) die Dreiecke ABC und DEF auf den gleichen Grundlinien BC und EF, auch zwischen einerlei Parallelen AD und BF, so ist △ ABC = △ DEF.

Beweis.

Wenn man die AD über A und D verlängert, durch B die BG mit CA und durch F die FH mit ED parallel zieht (31. S.), so sind die Parallelogramme GBCA und DEFH einander gleich (36. S.). Nun ist aber das Dreieck ABC die Hälfte von GACB und das Dreieck DEF die Hälfte von DHFE (34. S.), folglich ist auch $\triangle ABC = \triangle DEF$ (7. Gr.)

Der 39. Satz.

Lehrsatz.

Wenn zwei gleiche Dreiecke nach der nämlichen Seite auf einerlei Grundlinie stehen, so sind sie auch zwischen einerlei Parallelen.

Es seien die gleichen Dreiecke (Fig. 39.) ABC und DBC auf einerlei Grundlinie BC und auf einerlei Seite von derselben, so muß die Linie AD, welche ihre Spitzen verbindet, mit BC parallel seyn.

Beweis.

Wenn die Linie AD nicht parallel mit BC ist, so muß eine andere durch A gezogene mit BC gleichlaufend seyn. Wäre nun AE diese mit BC parallele Linie, so müßte, wenn EC gezogen wird,

$\triangle ABC = \triangle EBC$ seyn (37. S.)

Nun ist aber $\triangle ABC = \triangle DBC$ nach der Annahme, folglich

wäre $\triangle DBC = \triangle EBC$, welches unmöglich ist (9. Gr.)

Der 40. Satz.

Lehrsatz.

Wenn gleiche Dreiecke auf gleichen Grundlinien stehen und auf einerlei Seite derselben liegen, so ist die Verbindungslinie ihrer Spitzen parallel mit den Grundlinien.

Es seien (Fig. 40.) die gleichen Dreiecke ABC und DCE auf den gleichen Grundlinien BC und CE, auch auf einerlei

Seite von derselben, so muß die Verbindungslinie AD mit BE parallel seyn.

Beweis.

Wenn die AD nicht mit BE parallel wäre, so sei AF mit BE gleichlaufend. Zieht man nun FE, so wäre
△ ABC = △ FCE (38. S.) Allein es ist auch
△ ABC = △ DCE nach der Annahme, folglich wäre
△ DCE = △ FCE (1. Gr.), welches widersprechend ist (9. Gr.)

Der 41. Satz.

Lehrsatz.

Wenn ein Parallelogramm mit einem Dreiecke auf einerlei Grundlinie steht, und beide in einerlei Parallelen liegen, so ist das Parallelogramm das Doppelte des Dreiecks.

Es sei (Fig. 41.) das Parallelogramm ABCD mit dem Dreiecke EBC auf einerlei Grundlinie BC, und die Linie ADE sei parallel mit BC, so ist das Parallelogramm ABCD das Doppelte des Dreiecks EBC.

Beweis.

Wenn man die Diagonale AC zieht, so ist
△ ABC = △ EBC (37. S.) Nun ist aber
ABCD = 2 △ ABC (34. S.) Daher muß auch
ABCD = 2 △ EBC seyn.

Der 42. Satz.

Aufgabe.

Es ist ein Dreieck gegeben, und man soll ein Parallelogramm bilden von einem gegebenen Winkel, welches jenem Dreiecke gleich ist.

Es sei (Fig. 42.) ABC das gegebene Dreieck und D der gegebene Winkel. Man soll ein Parallelogramm bilden, welches dem gegebenen Dreiecke gleich ist und worin sich der Winkel D befindet.

Auflösung.

Man halbire BC in E (10. S.) und ziehe die AE, setze hierauf an E den Winkel CEF = ∠D (23. S.) und ziehe durch A die

AG mit BC und durch C die CG mit FE parallel (31. S.), so ist FECG das verlangte Parallelogramm.

Beweis.

Hier ist △ ABE = △ AEC (38. S.), folglich
△ ABC = 2 △ AEC. Allein es ist
FECG = 2 △ AEC (41. S.), folglich
△ ABC = FECG (6. Gr.)

Der 43. Satz.

Lehrsatz.

In jedem Parallelogramme sind die Ergänzungen der um die Diagonale liegenden Parallelogramme einander gleich.

Es sei (Fig. 43.) ABCD das gegebene Parallelogramm und AC seine Diagonale, um welche die Parallelogramme EH und GF liegen, deren Ergänzungen BK und KD sind, so ist BK = KD.

Beweis.

Da △ ABC = △ CAD (34. S.) und ebenso
△ AEK = △ AHK, so ist
EKCB = KHDC (3. Gr.) Nun ist aber
△ KGC = △ KCF (34. S.) Daher muß
BK = KD seyn (3. Gr.)

Der 44. Satz.

Aufgabe.

Auf einer gegebenen geraden Linie ein Parallelogramm zu bilden, welches einem gegebenen Dreiecke gleich ist und worin sich ein gegebener Winkel befindet.

Es sei AB (Fig. 44.) die gegebene Linie, C das gegebene Dreieck und D der gegebene Winkel. Man soll auf AB unter dem Winkel D ein Parallelogramm bilden, welches dem Dreiecke C gleich ist.

Auflösung.

Man bilde ein Parallelogramm BEFG = △ C (42. S.) so, daß ∢ EBG = ∢ D ist, und lege dasselbe so an die gegebene

Linie AB, daß AB und BE eine einzige gerade Linie bilden. Nun ziehe man durch A die AH mit EF parallel (31. S.), verlängere FG bis H, und ziehe HB, so ist ∢ AHF + EFH = 2R (29. S.) Daher ∢ BHF + ∢ EFH < 2R, und die Linien HB und FE müssen über B und E hinlänglich verlängert einmal zusammentreffen (11. Gr.) Wenn dieß in K geschieht, so ziehe man durch K die KL mit FH parallel (31. S.), so ist HLKF ein Parallelogramm.

Beweis.

Hier ist in dem Parallelogramme HLKF die Linie KH Diagonale, um welche die Parallelogramme AG und ME liegen, deren Ergänzungen LB und BF sind. Daher ist nun LB = BF (43. S.) Es ist aber BF = △ C, folglich auch

LB = △ C (1. Gr.)

Da nun ∢ GBE = ∢ ABM = ∢ D (15. S.), so ist auch ∢ ABM = ∢ D.

Der 45. Satz.

Aufgabe.

Wenn eine geradlinige Figur gegeben ist, so soll ein Parallelogramm gebildet werden, welches ihr gleich ist, und einen gegebenen Winkel enthält.

Es sei (Fig. 45.) ABCD die gegebene geradlinige Figur, und E der gegebene Winkel. Man soll ein Parallelogramm bilden, welches der Figur ABCD gleich ist und den Winkel E enthält.

Auflösung.

Man ziehe DB und mache unter dem Winkel HKF = ∢ E ein Parallelogramm FH, welches dem Dreiecke ADB gleich ist (42. S.) Dann bilde man auf GH ein Parallelogramm GM, welches dem Dreiecke DBC gleich ist, und einen Winkel GHM = ∢ E enthält (44. S.)

Beweis.

Da ∢ FKH = ∢ E, und ferner

∢ GHM = ∢ E, so ist auch

∢ GHM = ∢ FKH (1. Gr.) Da nun

$\sphericalangle GHK = \sphericalangle GHK$, so wird auch

$\sphericalangle GHM + \sphericalangle GHK = \sphericalangle FKH + \sphericalangle GHK = 2R$ (29. S.)

Daher liegen KH und HM in einer geraden Linie KM (24. S.)

Da nun FG mit KM gleichlaufend ist, so hat man

$\sphericalangle FGH = \sphericalangle GHM$ (29. S.) Da ferner

$\sphericalangle LGH = \sphericalangle LGH$, so ist auch

$\sphericalangle FGH + \sphericalangle LGH = \sphericalangle GHM + \sphericalangle LGH = 2R$ (29. S.)

Daher liegen auch FG und GL in einer geraden Linie FL (14. S.)

Da nun ferner FK und GH, sowie auch GH und LM einander gleich und parallel sind (34. S.), so ist auch FK der LM gleich und parallel (30. S.) Daher sind auch FL und KM gleich und parallel (33. S.), und es muß KFLM ein Parallelogramm seyn, worin $\sphericalangle FKM = \sphericalangle E$ ist.

Da endlich $FH = \triangle ABD$, und ebenso

$GM = \triangle DBC$, so muß auch

$KFLM = ABCD$ seyn (2. Gr.)

Der 46. Satz.

Aufgabe.

Es ist eine gerade Linie gegeben, und man soll ihr Quadrat auf ihr bilden.

Es sei AB (Fig. 46.) die gegebene Linie, und es soll das Quadrat von AB auf derselben gebildet werden.

Auflösung.

Man errichte in A auf BA die AC senkrecht (11. S.) und mache $AD = AB$. Sodann ziehe man durch D die DE mit AB, und durch B die BE mit AD parallel (31. S.)

Beweis.

Nach der Construction ist ADEB ein Parallelogramm, folglich

$AB = DE$ (34. S.) Aber es ist auch

$AB = AD$, folglich ist

$AB = AD = DE = EB$ und das Parallelogramm ADEB ist gleichseitig.

Da nun AB und DE parallel sind, so ist $\sphericalangle BAD + \sphericalangle ADE = 2R$ (29. S.) Allein es ist $\sphericalangle BAD = R$, folglich auch

$\sphericalangle ADE = R$.

Da nun in Parallelogrammen die gegenüberliegenden Winkel einander gleich sind (34. S.), so ist auch ∢ ABE = ∢ BED = R und folglich ADEB auch rechtwinkelig. Daher muß ADEB ein Quadrat seyn (30. Erkl.)

Der 47. Satz.

Lehrsatz.

In jedem rechtwinkeligen Dreiecke ist das Quadrat, welches über der, dem rechten Winkel entgegenstehenden Seite beschrieben wird, so groß, als die beiden Quadrate, welche von den ihn einschließenden Seiten gebildet werden, zusammengenommen.

Es sei (Fig. 47.) BAC ein rechtwinkeliges Dreieck, worin BAC = R, so ist das Quadrat über BC so groß, als die beiden Quadrate über BA und AC zusammengenommen.

Beweis.

Wenn man über BC das Quadrat BCED, über BA das Quadrat BAGF und über AC das Quadrat ACKH beschreibt (46. S.), so ist ∢ BAC = ∢ BAG = R und die Linien CA und AG bilden eine gerade Linie CG (14. S.) Nun ziehe man AD und FC und aus A die AL mit BD gleichlaufend (31. S.) Hier ist ∢ DBC = ∢ FBA (10. Gr.) und

∢ CBA = ∢ CBA, daher

∢ DBA = ∢ FBC (2. Gr.) Ferner ist

AB = BF, auch

DB = BC, folglich

△ ABD = △ FBC (4. S.)

Nun ist, weil AL mit BD und GC mit FB gleichlaufend ist,

BL = 2 △ ABD (41. S.) und

GB = 2 △ FBC, daher auch

BL = GB (6. Gr.)

Zieht man die Linien AE und BK, so wird auf ähnliche Art bewiesen, daß CL = CH ist, daher muß auch

BL + CL = GB + CH seyn. Allein

BL + CL = BE, folglich ist

BE = GB + CH.

Der 48. Satz.

Lehrsatz.

Wenn in einem Dreiecke das Quadrat einer Seite so groß ist, als die Quadrate der zwei andern Seiten zusammengenommen sind, so ist der von diesen andern Seiten eingeschlossene Winkel ein Rechter.

Es sei in dem Dreiecke BAC (Fig. 48) das Quadrat von BC so groß, als die Quadrate von BA und von AC zusammengenommen, so ist der Winkel BAC ein Rechter.

Beweis.

Man errichte auf AC aus A die AD senkrecht, mache AD = AB und ziehe DC, so ist

□. AD = □. AB *). Da nun

□. AC = □. AC, so muß

□. AD + □. AC = □. AB + □. AC seyn (2. Gr.)

Es ist aber □. AD + □. AC = □. DC (47. S.) und

□. AB + □. AC = □. BC nach der Annahme.

Folglich □. DC = □. BC, und daher

DC = BC.

Da nun AD = AB, ferner

AC = AC und endlich

DC = BC, so ist

∢ DAC = ∢ BAC (8. S.) Es ist aber

∢ DAC = R, daher auch

∢ BAC = R.

*) Die Bezeichnung □. AD bedeutet das über AD beschriebene Quadrat, und so bei den übrigen Linien.

Ende des ersten Buchs.

Das zweite Buch der Elemente des Euclides.

Dieses Buch handelt von jenen Rechtecken und Quadraten, welche entstehen, wenn eine gerade Linie auf bestimmte Art getheilt wird. Aus der Vergleichung dieser Figuren geht eine Reihe merkwürdiger Sätze hervor, welche mit andern ähnlicher Art leicht vermehrt werden könnten. Satz 1—14.

Erklärungen des zweiten Buches.

1. Von jedem rechtwinkeligen Parallelogramme (oder Rechtecke) sagt man, es sei aus den beiden geraden Linien, welche den rechten Winkel einschließen, gebildet.

2. In einem Parallelogramme heiße jedes der beiden um die Diagonale herumliegenden Parallelogramme nebst den beiden Ergänzungen, ein Gnomon.

Der 1. Satz.

Lehrsatz.

Wenn von zwei gegebenen geraden Linien die eine in beliebig viele Abschnitte getheilt wird, so ist das aus den beiden ganzen Linien gebildete Rechteck der Summe jener Rechtecke gleich, welche aus der ungetheilten Linie, und aus jedem der Abschnitte gebildet werden.

Es seien (Fig. 49) A und BC die gegebenen geraden Linien, auch sei die BC in den Puncten D und E willkührlich getheilt, so ist das Rechteck aus A und BC der Summe der Rechtecke aus A und BD, aus A und DE und aus E und EC gleich. (Anstatt Rechteck wird künftig immer Recht. gesetzt.)

Beweis.

Man errichte auf CB aus B die senkrechte BF (I, 11. S.), mache BG = A, ziehe durch G die GH gleichlaufend mit BC und durch D, E und C die DK, EL und CH gleichlaufend mit BG (I, 31. S.) so ist

BH = BK + DL + EH. Nun ist aber
BH = Recht. aus GB und BC, ferner
BK = Recht. aus GB und BD, desgleichen
DL = Recht. aus KD und DE und endlich
EH = Recht. aus LE und EC und es ist
LE = KD = GB = A (I. 34. S.)
Folglich ist Recht. aus A und BC = Recht. aus A und BD + Recht. aus A und DE + Recht. aus A und EC.

Der 2. Satz.

Lehrsatz.

Wenn eine gerade Linie in einem willkührlichen Puncte geschnitten wird, so sind die zwei Rechtecke, aus der ganzen Linie und jedem ihrer Abschnitte zusammengenommen, dem Quadrate der ganzen Linie gleich.

Wenn (Fig. 50.) AB in C willkührlich getheilt ist, so ist die Summe die Rechtecke aus BA und AC, und BE und BC dem Quadrate von AB gleich.

Beweis.

Man errichte über AB das Quadrat ABED (I, 46. S.) und ziehe durch C die CF mit AD und BE gleichlaufend (I, 31. S.), so ist ABED = AF + CE. Nun ist aber
ABED = Quadr. von AB, ferner
AF = Recht. aus DA und AC, desgleichen
CE = Recht. aus FC und CB, endlich auch
FC = DA = AB, folglich
Q. von AB = Recht. aus BA und AC + Recht. aus AB und BC.

Der 3. Satz.

Lehrsatz.

Wenn eine gerade Linie in einem willkührlichen Puncte geschnitten wird, so ist das Rechteck aus der

ganzen Linie und einem der beiden Abschnitte der Summe aus dem Rechtecke der beiden Abschnitte und dem Quadrate des ersten Abschnittes gleich.

Es sei AB (Fig. 51.) in C willkührlich geschnitten, so ist das Rechteck aus AB und BC der Summe aus dem Rechtecke von AC und CB nebst dem Quadrate von BC gleich.

Beweis.

Man errichte über BC das Quadrat BCDE (I, 46. S.) verlängere ED nach F und ziehe durch A die AF mit CD und BE gleichlaufend (I, 31. S.), so ist

AE = AD + CE. Nun ist aber
AE = Recht. aus FA und AB,
AD = Recht. aus FA und AC,
CE = Quadr. von BC und endlich
FA = DC = CB.

Folglich ist Recht. aus AB und BC = Recht. aus AC und CB + Quadrat von CB.

Der 4. Satz.

Lehrsatz.

Wenn eine gerade Linie in einem beliebigen Puncte geschnitten wird, so ist das Quadrat von der ganzen Linie den Quadraten der beiden Abschnitte nebst dem doppelten Rechtecke aus diesen Abschnitten gleich.

Es sei (Fig. 52.) die Linie AB in C willkührlich geschnitten, so ist Quadrat von AB = Quadrat von AC + Quadrat von CB + 2 Recht. aus AB und CB.

Beweis.

Man errichte über AB das Quadrat ABED (I, 46. S.), ziehe seine Diagonale BD, und durch C die CF mit AD und BE, durch G aber die HK mit AB und DE parallel (I, 31. S.)

Da nun CF mit AD parallel ist, so ist auch ∠ BGC = ∠ BDA (I, 29. S.) Weil aber auch AD = AB, so ist ∠ BDA = ∠ ABD (I, 5. S.) Folglich auch ∠ BGC = ∠ ABD

(I, 1. Gr.) und daher BC = CG (I, 6. S.) Also ist das Viereck CK gleichseitig.

Da nun auch CF parallel mit BE ist, so ist ∠KBC + ∠GBC = 2R (I, 29. S.) Nun ist aber ∠KBC und daher auch ∠GBC = R (I, 34. S.) Folglich ist das Viereck CK auch rechtwinkelig. Da es auch gleichseitig ist, so muß CK das über BC beschriebene Quadrat seyn (I, 30. Erkl.)

Auf vollkommen ähnliche Art wird bewiesen, daß HF das über HG = AC beschriebene Quadrat ist.

Da nun AG = GE (I. 43. S.) Allein

AG = Recht. aus AC und CG = Recht. aus AC u. CB,

so ist auch GE = Recht. aus AC und CB, und folglich

AG + GE = 2 Recht. aus AC und CB. Nun war aber

CK = Quadr. CB und

HF = Quadr. AC, auch

ADEB = Quadr. AB.

Folglich ist Quadr. AB = Quadr. AC + Quadr. CB + 2 Recht. von AC und CB.

Zusatz.

Hieraus folgt, daß in jedem Quadrate die um die Diagonale liegenden Parallelogramme auch Quadrate sind.

Der 5. Satz.

Lehrsatz.

Wenn eine gerade Linie in einem Puncte gleich und in einem andern Puncte ungleich getheilt wird, so ist das Rechteck aus den ungleichen Abschnitten nebst dem Quadrate des Abschnittes zwischen den Theilpuncten zusammen dem Quadrate der halben Linie gleich.

Es sei die gerade AB (Fig. 53.) in C gleich, und in D ungleich getheilt, so ist das Rechteck aus AD und DB nebst dem Quadrate von CD dem Quadrate von CB gleich.

Beweis.

Man errichte über CB das Quadrat CBFE (I, 46. S.), dessen Diagonale BE ist, ziehe durch D die DHG mit CE und

BF; durch H die KHM mit CB und EF und durch A die AK mit CE und BF parallel (1, 31. S.)

Da nun hier CH = HF (I, 43. S.) und
DM = DM, so ist
CM = DF (I, 2. Gr.)
Da aber AC = CB, so ist auch
AL = CM (1, 36. S.) folglich auch
AL = DF (I, 1. Gr.) Da aber
CH = CH, so ist
AH = Gnom. NOP und da
LG = LG, so ist auch
AH + LG = CEFB.

Nun ist aber AH = Recht. aus AD und DH = Recht. aus AD und DB, ferner ist LG = Quadr. LH = Quadr. CD (II, 4. Zus.) ferner CEFB = Quadr. von CB. Daher ist

Recht. aus AD und DB + Quadr. CD = Quadr. CB.

Der 6. Satz.

Lehrsatz.

Wenn eine gerade Linie halbirt und dieselbe um eine bestimmte Linie verlängert wird, so ist das Rechteck, welches aus der Verlängerung und aus der ganzen nebst der Verlängerung gebildet wird, nebst dem Quadrate der halben Linie so groß, als das Quadrat aus der halben Linie nebst ihrer Verlängerung.

Es sei (Fig. 54.) die AB in C halbirt und über B um die bestimmte Linie BD verlängert, so ist das Rechteck aus AB und BD nebst dem Quadrate von CB dem Quadrate von CD gleich.

Beweis.

Man bilde von CD das Quadrat CDFE (I, 46. S.), dessen Diagonale DE ist, ziehe durch B die BHG mit CE und DF, durch H die MHK mit AD und EF und durch A die AK mit CE und DF gleichlaufend (I, 31. S.)

Da nun hier AC = CB und folglich
AL = CH (I, 36. S.) aber
CH = HF (I, 43. S.) und
AL = HF (I, 1. Gr.) dann
CM = CM, so ist
AM = Gnom. NOP; da aber
LG = LG, so ist
AM + LG = CEFD. Nun ist aber
AM = Recht. aus AD und DM = Recht. aus AD und DB
LG = Quadr. LH = Quadr. CB und CEFD = Quadr. CD (II, 4. Zus.)
Folglich ist Recht. aus AD und DB + Quadr. CB = Quadr. CD.

Der 7. Satz.

Lehrsatz.

Wenn eine gerade Linie in einem willkührlichen Puncte geschnitten wird, so sind die Quadrate aus der ganzen Linie und aus einem ihrer Abschnitte zusammen so groß, als das doppelte Rechteck aus der ganzen Linie und dem ebenbemerkten Abschnitte nebst dem Quadrate des andern Abschnittes zusammen.

Es sei die Linie BA (Fig. 55.) in C willkührlich getheilt, so ist das Quadrat von AB nebst dem Quadrate von BC dem Rechtecke aus AB und BC nebst dem Quadrate von AC gleich.

Beweis.

Man bilde über AB das Quadrat ABED (I, 46. S.), ziehe die Diagonale BD, durch C die CN parallel mit BE und AD, und durch G die FH mit BA und ED gleichlaufend (I, 31. S.)

Hier ist AG = GE (I, 43. S.) da nun
CF = CF, so ist
AF = CE und daher
AF + CE = 2 AF.

Nun ist aber AF + CE = Gnom KLM + CF. Daher auch
Gnom. KLM + CF = 2 AF; allein
HN = HN, folglich
ADEB + CF = 2 AF + HN; allein es ist
ADEB = Quadrat von AB.
CF = Quadrat von BC (II, 4. Zus.)
AF = Recht. aus AB und BF = Recht. aus AB
und BC und
HN = Quadr. HG = Quadr. AC (II, 4. Zus.)
Folglich ist Quadr. AB + Quadr. BC = 2 Recht. von AB und BC + Quadr. AC.

Der 8. Satz.

Lehrsatz.

Wenn eine gerade Linie in einem Puncte willkührlich geschnitten wird, so ist das vierfache Rechteck aus der ganzen Linie und einem ihrer Abschnitte, nebst dem Quadrate des andern Abschnitts, zusammen so groß als das Quadrat einer Linie, welche aus der ganzen und dem ersten Abschnitte besteht.

Es sei die Linie AB (Fig. 56.) willkührlich in C geschnitten, so ist das vierfache Rechteck aus AB und BC, nebst dem Quadrate von AC, zusammen so groß als das Quadrat von AD = AB + BC.

Beweis.

Wenn man die Linie AB über B verlängert bis BD = BC, so ist AD = AB + BC. Nun errichte man über AD das Quadrat ADFD (I, 46. S.), ziehe die Diagonale DE, durch B und C die BL und CH parallel mit DF und AE und durch K und Q die MN und OP parallel mit AD und EF (I, 31. S.)

Da hier CB = BD und
BC = GK = QR auch
BD = KN = RP (I, 34. S.) so ist
GK = KN und QR = RP (I, 1. Gr.) daher
CK = BN und GR = KP (I, 36. S.)

Da aber CK = KP (I, 43. S.), so sind alle vier Parallelogramme einander gleich und CP = 4 CK.

Da CB = BD und BD = BK (II, 4. Zus.) = CG (I, 34. S.) auch CB = GK = GQ, so ist CG = GQ. Es war aber auch QR = RP, folglich ist

AG = MQ und QL = RF (I, 36. S.)

Es ist aber im Parallelogramme ML das Rechteck MQ = Recht. QL (I, 43. S.), folglich auch AG = RF. Daher ist AG = MQ = QL = RF und ihre Summe = 4AG. Allein CP = 4CK. Daher auch Gnom. STV = 4 AK, aber

OH = OH, folglich

AEFD = Quadr. AD = 4 AK + OH.

Allein AK = Recht. aus AB und BK = Recht. aus AB und BC und

OH = Quadr. OQ = Quadr. AC (II, 4. Zus.) folglich ist 4 Recht. aus AB und BC + Quadr. AC = Quadr. AD.

Der 9. Satz.

Lehrsatz.

Wenn eine gerade Linie in einem Puncte gleich und in einem andern ungleich getheilt wird, so sind die Quadrate der ungleichen Abschnitte zusammen so groß, als die doppelten Quadrate aus der halben Linie und aus dem Abschnitte zwischen den Theilpuncten zusammen.

Es sei (Fig. 57.) die AB in C gleich und in D ungleich getheilt, so ist das Quadrat von AD und das Quadrat von DB zusammengenommen so groß, als die Summe aus dem doppelten Quadrate von AC und dem doppelten Quadrate von CD.

Beweis.

Man errichte auf AB aus C die CE senkrecht (I, 11. S.) mache CE = CA = CB und ziehe die AE und EB. Auch ziehe man durch D die DF mit CE und durch F die FG mit BA parallel (I, 31. S.) und die Verbindungslinie AF.

Da hier ∢ ACE = R und AC = CE, so ist
∢ AEC = ½ R (I, 32. u. 5. S.) und ebenso
∢ CEB = ∢ CBE = ½ R, daher ist
∢ AEB = R.

Da nun GF mit AB und FD mit EC gleichlaufend, und folglich ∢ EGF = ∢ FDB = ∢ ECB = R (I, 29. S.), auch ∢ GEF = ∢ DBF = ½ R, so ist auch ∢ EFG = ∢ DFB = ½ R (I, 32. S.), daher EG = GF und FD = DB (I, 6. S.) Da ∢ ACE = R und AC = CE, so ist Quadr. AE = 2 Quadr. AC (I, 47. S.) Da ∢ EGF = R und EG = GF, so ist das Quadr. EF = 2 Quadr. GF (I, 47. S.) und weil auch GF = CD (I, 34. S.), so ist das Quadr. EF = 2 Quadr. CD. Da aber ∢ AEF = R, so ist das Quadr. AF = dem Quadr. AE nebst dem Quadr. EF (I, 47. S.) Nun war aber das Quadr. AE = 2 Quadr. AC und das Quadr. EF = 2 Quadr. CD. Daher ist das Quadr. AF = 2 Quadr. AC + 2 Quadr. CD. Es ist aber, weil ∢ FDA = R, das Quadr. AF = dem Quadr. AD + dem Quadr. DF, oder, weil DF = DB, so ist auch das Quadr. AF dem Quadr. AD nebst dem Quadr. DB gleich. Daher ist das Quadr. AD nebst dem Quadr. DB = 2 Quadr. AC + 2 Quadr. DC.

Der 10. Satz.

Lehrsatz.

Wenn eine gerade Linie halbirt und in ihrer Verlängerung eine andere ihr angesetzt wird, so ist das Quadrat der aus der ganzen und der angesetzten bestehenden Linie, nebst dem Quadrate der angesetzten, so groß, als das doppelte Quadrat aus der halben, nebst dem doppelten Quadrate aus der halben und der angesetzten Linie.

Es sei (Fig. 58.) die AB in C halbirt, und an die verlängerte AB die Linie BD gesetzt, so ist das Quadrat von AD

+ dem Quadrate von BD = 2 Quadrat von AC + 2 Quadrat von CD.

B e w e i s.

Man errichte auf AB aus C die CE lothrecht (I, 11. S.), mache CE = CA = CB und ziehe AE und EB. Zieht man nun durch E die EF mit AD und durch D die DF mit CE gleichlaufend (I, 31. S.), so ist ∢ CEF + ∢ EFD = 2 R (I, 29. S.) Folglich ∢ BEF + EFD < 2 R, und es müssen die Linien EB und FD über B und D verlängert einmal zusammentreffen (I, 11. Gr.) Wenn dieß in G geschieht, so ziehe man AG.

Da ∢ ACE = R und AC = CE, so ist auch
∢ AEC = $1/2$ R (I, 32. u. 5. S.) Ebenso ist
∢ CEB = ∢ CBE = $1/2$ R. Daher auch
∢ AEB = R.

Nun ist ∢ DBG = ∢ CBE (I, 15. S.) und, weil FG mit CE gleichlaufend ist, auch ∢ DGB = ∢ CEB (I, 29. S.) Daher ist ∢ DBG = ∢ DGB = $1/2$ R und DB = DG (I, 6. S.) Nun ist ∢ ECD = R und EFD = ∢ ECD. Daher auch EF = FG (I, 32. u. 6. S.)

Da nun ∢ ACE = R und AC = CE, so ist das Quadr. AE = 2 Quadr. AC (I, 47. S.) Da auch EFG = R und EF = FG, so ist das Quadr. EG = 2 Quadr. EF (I, 47. S.) Es ist aber EF = CD (I, 34. S.) Daher Quadr. EG = 2 Quadr. von CD.

Da ferner ∢ AEG = R, so ist Quadr. AG = Quadr. AE + Quadr. von EG (I, 47. S.) Es war aber Quadr. AE = 2 Quadr. AC und Quadr. EG = 2 Quadr. CD. Folglich ist Quadr. AG = 2 Quadr. AC + 2 Quadr. CD.

Es ist aber, weil ∢ ADG = R auch Quadr. AG = Quadr. AD + Quadr. DG (I, 47. S.) Allein DG = BD, folglich Quadr. AG = Quadr. AD + Quadr. BD und daher denn Quadr. AD + Quadr. BD = 2 Quadr. AC + 2 Quadr. CD.

Der 11. Satz.

Aufgabe.

Eine gegebene gerade Linie so zu theilen, daß das Rechteck aus der ganzen Linie und einem Abschnitte dem Quadrate des andern Abschnitts gleich ist.

Es sei (Fig. 59.) AB die gegebene Linie, so soll dieselbe in H so getheilt werden, daß das Rechteck aus AB und BH dem Quadrate von AH gleich ist.

Auflösung.

Man bilde über AB das Quadrat ABDC (I, 46. S.) halbire AC in E (I, 10. S.), ziehe BE, verlängere CA nach F bis EF = EB, bilde über AF das Quadrat AFGH und verlängere GH bis K, so ist die Linie AB im Puncte H auf die verlangte Art getheilt.

Beweis.

Da CE = EA ist und CA bis F verlängert wurde, so ist Recht. aus CF und FA + Quadr. AE = Quadr. EF (II, 6. S.) = Quadr. EB, weil EF = EB. Nun ist, weil ∠ BAE = R, Quadr. EB = Quadr. AB + Quadr. AE (I, 47. S.) Folglich auch Quadr. AB + Quadr. AE = Recht. aus CF und FA + Quadr. AE (I, 1. Gr.) Wird nun beiderseits das Quadrat von AE weggenommen, so bleibt Recht. aus CF und FA = Quadr. AB (I, 3. Gr.) oder FK = AD. Nimmt man beiderseits HC weg, so ist auch FH = HD; allein es ist FH das Quadrat über HA und HD das Rechteck aus DB und BH, oder auch aus AB und BH, weil DB = AB; folglich ist Rechteck aus AB und BH = Quadrat über AH.

Der 12. Satz.

Lehrsatz.

In jedem stumpfwinkeligen Dreiecke übertrifft das Quadrat der, dem stumpfen Winkel gegenüber-

liegenden Seite die beiden Quadrate der ihn einschließenden Seiten zusammengenommen, um das doppelte Rechteck aus einer dieser Seiten und aus der ihr in verlängerter Richtung angesetzten Linie vom stumpfen Winkel bis zu dem Lothe, welches man auf sie von ihrem Gegenwinkel herabzieht.

Wenn (Fig. 60.) CAB das stumpfwinkelige Dreieck und BAC der stumpfe Winkel, auch BD das Loth ist, welches von B auf die verlängerte CA gezogen wird, so ist das Quadrat von CB = dem Quadrate von CA + Quadrat von AB + 2 Recht. aus CA und AD.

Beweis.

Da die Linie CD in A willkührlich getheilt ist, so hat man Quadr. CD = Quadr. CA + Quadr. AD + 2 Recht. aus CA und AD (II, 4. S.) Setzt man nun beiderseits das Quadrat von BD hinzu, so ist Quadr. CD + Quadr. DB = Quadr. CA + Quadr. AD + Quadr. DB + 2 Recht. aus CA und AD (I, 2. Gr.) Da nun der Winkel bei D ein Rechter ist, so hat man Quadr. CD + Quadr. DB = Quadr. CB (I, 47. S.) und ebenso Quadr. AD + Quadr. DB = Quadr. AB. Daher ist nun Quadr. CB = Quadr. CA + Quadr. AB + 2 Recht. aus CA und AD.

Der 13. Satz.

Lehrsatz.

In jedem spitzwinkeligen Dreiecke wird das Quadrat der, einem spitzen Winkel gegenüberliegenden Seite von den Quadraten der ihn einschließenden Seiten zusammengenommen um das doppelte Rechteck übertroffen, welches aus einer der einschließenden Seiten und jenem Abschnitte von ihr gebildet wird, der zwischen dem spitzen Winkel und einem Lothe liegt, welches vom gegenüberliegenden Winkelpuncte auf sie gezogen wird.

Es sei ABC (Fig. 61.) das spitzwinkelige Dreieck und AD das von A auf BC gezogene Loth, so ist das Quadr. von CB + Quadr. von AB = 2 Recht. aus CB und BD + Quadr. von AC.

Beweis

Da die Linie CB in D willkührlich geschnitten ist, so ist Quadr. CB + Quadr. DB = 2 Rechteck aus CB und BD + Quadr. DC (II, 7. S.) Wird beiderseits das Quadr. AD zugesetzt, so ist Quadr. CB + Quadr. BD + Quadr. AD = 2 Recht. aus CB und BD + Quadr. DC + Quadr. AD. Weil nun bei D zwei rechte Winkel sind, so ist Quadr. BD + Quadr. AD = Quadr. AB, und Quadr. DC + Quadr. AD = Quadr. AC (I, 47. S.) Folglich ist auch Quadr. CB + Quadr. AB = 2 Recht. CB und BD + Quadr. AC.

Der 14. Satz.

Aufgabe.

Wenn eine geradlinige Figur gegeben ist, so soll ein Quadrat gebildet werden, welches ihr gleich ist.

Es sei (Fig. 62.) A die gegebene geradlinige Figur und man soll ein Quadrat finden, welches ihr gleich ist.

Auflösung.

Man bilde ein Rechteck BD = A (I, 45. S.) Ist nun BE = ED, so ist BD das verlangte Quadrat. Sind aber die Linien BE und ED ungleich, so verlängere man die größere BE nach F bis EF = ED. Dann halbire man BF in G, beschreibe aus G mit GB oder GF den Halbkreis BHF, verlängere DE bis H und ziehe GH.

Beweis.

Da die Linie BF in G gleich und in E ungleich getheilt ist, so ist Rechteck aus BE und EF + Quadr. EG = Quadr.

GF (II, 5. S.) = Quadr. GH (I, 15. Erkl.) Da nun bei E der rechte Winkel HEG ist, so ist Quadr. GH = Quadr. HE + Quadr. EG. Daher ist Rechteck aus BE und EF + Quadr. EG = Quadr. HE + Quadr. EG (I, 47. S.) Nimmt man nun beiderseits Quadr. von EG hinweg, so bleibt Recht. aus BE und EF = A = Quadr. HE.

Ende des zweiten Buchs.

Das
dritte Buch
der
Elemente des Euclides.

Dieses Buch handelt:

1. Von geraden Linien, welche in Bezug auf den Kreis theils schneidende, theils berührende sind. Satz 1—19.

2. Von Winkeln, deren Scheitel theils im Mittelpuncte, theils in der Peripherie des Kreises liegen. Satz 20—34.

3. Von Rechtecken und Quadraten solcher Linien, welche zum Theil in dem Kreise, zum Theil an und ausser demselben sich befinden. Satz 35—37.

Erklärungen des dritten Buches.

1. Kreise sind einander gleich, in welchen die Durchmesser oder die vom Mittelpuncte ausgehenden Linien (die Halbmesser) einander gleich sind.

2. Eine gerade Linie berührt den Kreis, wenn sie denselben trifft, ohne ihn in ihrer Verlängerung zu schneiden. (Man nennt sie Tangente des Kreises.)

5. Kreise berühren einander, wenn sie einander treffen, ohne sich zu durchschneiden.

4. Im Kreise sind gerade Linien gleich weit vom Mittelpuncte entfernt, wenn die aus dem Mittelpuncte auf sie gefällten Lothe einander gleich sind.

5. Jene gerade Linie ist aber weiter vom Mittelpuncte entfernt, worauf ein größeres Loth fällt.

6. Ein Kreisabschnitt (oder Segment) ist jene Figur, welche von einer geraden Linie und einem Theile des Umkreises (Kreisbogen) eingeschlossen wird.

7. Der Winkel des Kreisabschnitts ist jener, welcher von dieser geraden Linie und dem Kreisbogen eingeschlossen wird.

8. Der Winkel im Kreisabschnitte ist jener, welcher von zwei geraden Linien gebildet wird, die von einem willkührlichen Puncte des Kreisbogens an die Endpuncte der geraden Linie gehen, welche die Grundlinie des Abschnittes ist.

9. Da die, einen solchen Winkel einschließenden Linien einen Kreisbogen abschneiden, so sagt man, dieser Winkel stehe auf diesem Kreisbogen.

10. Ein Kreisausschnitt (Sector), ist die Figur, welche von den Schenkeln eines Winkels am Mittelpuncte des Kreises und dem von ihnen abgeschnittenen Kreisbogen umschlossen wird.

11. Kreisabschnitte sind einander ähnlich, wenn sie gleiche Winkel fassen, oder wenn die Winkel in den Abschnitten einander gleich sind.

Der 1. Satz.

Aufgabe.

Den Mittelpunct eines gegebenen Kreises zu finden.

Es sei (Fig. 63.) ABC der gegebene Kreis, und man soll seinen Mittelpunct finden.

Auflösung.

Man ziehe in dem Kreise eine willkührliche gerade Linie AB, halbire sie in D, und errichte aus D die DC senkrecht auf AB. Wird nun CD bis E verlängert und in F halbirt, so ist F der gesuchte Mittelpunct.

Beweis.

Wenn F der Mittelpunct des Kreises nicht wäre, so sei irgend ein anderer, etwa G, dieser Mittelpunct. Zieht man nun die GA, GD und GB, so ist

AD = DB, ferner
GD = GD und endlich
AG = GB (I, 15. Erkl.) daher

∡ ADG = ∡ GDB (I, 8. S.) und folglich jeder dieser Winkel ein Rechter (I, 10. Erkl.) Nun ist aber auch

∡ CDB = R, folglich wäre
∡ CDB = ∡ GDB (I, 10. Gr.), welches aber unmöglich ist (I, 9. Gr.)

Zusatz.

Hieraus folgt, daß, wenn im Kreise eine gerade Linie eine andere halbirt und auf ihr lothrecht steht, in der schneidenden Linie der Mittelpunct des Kreises sei.

Der 2. Satz.

Lehrsatz.

Wenn eine gerade Linie zwei beliebige Puncte in der Peripherie eines Kreises verbindet, so fällt sie innerhalb dieses Kreises.

In des Kreises ABC (Fig. 64.) Peripherie nehme man die willkührlichen Puncte A und B, und ziehe die gerade AB, so liegt diese innerhalb des Kreises.

Beweis.

Wenn diese gerade Linie nicht innerhalb dieses Kreises liegt, so falle sie ausserhalb, wie AEB. Nun nehme man des Kreises Mittelpunct D (III, 1. S.) und ziehe DA und DB. Dann nehme man zwischen A und B in der Peripherie einen beliebigen Punct F, ziehe DF, und verlängere sie bis E. Da nun hier

DA = DB (I, 15. Erkl.), so ist

∡ DAE = ∡ DBE (I, 5. S.) Nun ist aber

DEB > ∡ DAE (I, 16. S.), folglich auch

∡ DEB > ∡ DBE und daher

DB > DE (I, 19. S.) Es ist aber

DB = DF (I, 15. Erkl.) folglich wäre

DF > DE, welches unmöglich ist (I, 9. Gr.)

Der 3. Satz.

Lehrsatz.

Wenn im Kreise eine durch den Mittelpunct gehende gerade Linie eine andere nicht durch den Mittelpunct gehende halbirt, so schneidet sie dieselbe lothrecht; und wenn sie dieselbe lothrecht schneidet, so halbirt sie auch dieselbe.

Es sei (Fig. 65.) ACB der Kreis, in welchem die durch den Mittelpunct gehende Linie DC die nicht durch den Mittelpunct gehende AB in F halbirt, so stehen beide lothrecht auf einander, und wenn die durch den Mittelpunct gehende CD auf AB lothrecht steht, so wird AB durch sie halbirt.

Beweis.

Man nehme den Mittelpunct des Kreises E (III, 1. S.) und ziehe EA und EB.

I. Da CD die AB in F halbirt, so ist

AF = FB. Nun ist auch

EF = EF, und

AE = EB (I, 15. Erkl.) Daher ist

∢ AFE = ∢ BFE (I, 8. S.) und folglich die CD lothrecht auf AB (I, 10. Erkl.)

II. Wenn aber CD auf AB senkrecht steht, so ist

∢ AFE = ∢ EFB (I, 10. Erkl.) Ferner ist

AE = EB (I, 15. Erkl.) auch

∢ EAF = ∢ EBF (I, 5. S.) endlich

EF = EF, folglich

AF = BF (I, 26. S.)

Der 4. Satz.

Lehrsatz.

Wenn in dem Kreise zwei nicht durch den Mittelpunct gehende gerade Linien einander durchschneiden, so halbiren sie einander nicht.

In dem Kreise ABCD (Fig. 66.) schneiden die nicht durch den Mittelpunct gehenden Linien AC und BD einander in E; daher halbiren sie einander nicht.

Beweis.

Man nehme an, sie halbirten einander, so wäre AE = EC und BE = ED. Nimmt man nun des Kreises Mittelpunct F und zieht FE, so wäre

∢ FEA = ∢ FEB = R (III, 3. S.) Folglich

∢ FEA = ∢ FEB, welches unmöglich ist (I, 9. Gr.)

Der 5. Satz.

Lehrsatz.

Wenn zwei Kreise einander durchschneiden, so haben sie keinen gemeinschaftlichen Mittelpunct.

Wenn die beiden Kreise (Fig. 67.) ABC und CDG einander in B und C durchschneiden, so haben sie nicht einerlei Mittelpunct.

B e w e i s.

Gesetzt, sie hätten einen gemeinschaftlichen Mittelpunct E, so ziehe man EC und die willkührliche gerade Linie EFG, so ist für den Kreis ABC die EC = EF
und für den Kreis CDG die EC = EG (I, 15. Erkl.)
folglich müßte auch EG = EF seyn (I, 1. Gr.), welches aber unmöglich ist (I, 9. Gr.)

D e r 6. S a ß.

L e h r s a ß.

Wenn sich zwei Kreise inwendig berühren, so haben sie keinen gemeinschaftlichen Mittelpunct.

Wenn die beiden Kreise (Fig. 68.) ABC und CDE sich in dem Puncte C berühren, so haben sie nicht einerlei Mittelpunct.

B e w e i s.

Wenn sie den gemeinschaftlichen Mittelpunct F hätten, so wäre, wenn FC und die willkührliche Linie FEB gezogen wird, bei dem Kreise ABC die FC = FB und bei dem Kreise CDE die
FC = FE (I, 15. Erkl.),
daher wäre auch FB = FE (I, 1. Gr.), welches aber widersprechend ist (I, 9. Gr.)

D e r 7. S a ß.

L e h r s a ß.

Wenn man im Durchmesser eines Kreises einen Punct ausserhalb des Mittelpunctes annimmt, aus welchem gerade Linien zur Peripherie gehen, so ist die größte von ihnen diejenige, worin der Mittelpunct liegt, ihr Rest aber die kleinste; von den übrigen aber ist immer jene, welche näher bei der

durch den Mittelpunct gehenden liegt, größer, als die entferntere; auch gehen von diesem Puncte aus nur zwei gleiche gerade Linien auf beiden Seiten der kleinsten an den Umkreis.

Es sei ACDK (Fig. 69.) der Kreis, AD dessen Durchmesser, und F ein Punct ausser dem Mittelpuncte E. Wenn nun von F die Linien FB, FC und FG an den Umkreis gehen, so ist FA die größte, FD die kleinste; von den übrigen aber FB > FC, FC > FG.

Beweis.

I. Wenn man die geraden EB, EC und EG zieht, so ist
BE + EF > FB (I, 20. S.) Nun ist aber
BE = AE (I, 15. Erkl.), daher auch
BE + EF = AE + EF, und folglich
AF > FB.

Da BE = CE (I, 15. Erkl.) EF = EF und ∠ BEF > CEF, so ist BF > CF (I, 24. S.) und auf gleiche Weise FC > FG.

Da GF + FE > EG (I, 20. S.) und
EG = ED = DF + FE (I, 15. Erkl.), so ist
GF + FE > DF + FE, folglich
GF > DF (I, 5. Gr.)

II. Man setze an FE den Winkel FEH = ∠ FEG (I, 23. S.) und ziehe FH, so ist, weil auch EH = EG (I, 15. Erkl.) und
EF = EF, nun auch
FH = FG (I, 4. S.)

Wäre nun ausser FH noch irgend eine andere Linie, etwa FK, der FG gleich, so wäre auch FK = FH, welches unmöglich ist, da nach dem Obigen die der AF näher liegende FK größer ist, als die entferntere FH.

Oder, wäre FK = FG, so ziehe man EK. Nun ist auch KE = EG (I, 15. Erkl.) und EF = EF. Daher denn
∠ KEF = ∠ FEG (I, 8. S.) allein es war
∠ FEG = ∠ FEH; folglich wäre
∠ KEF = ∠ FEH, welches widersprechend ist.
(I, 9. Gr.)

Der 8. Satz.

Lehrsatz.

Wenn ausserhalb eines Kreises ein Punct angenommen wird, und von demselben gerade Linien zum Umkreise gehen, wovon eine nach dem Mittelpuncte gehet, die andern aber ihn willkührlich schneiden, so ist unter jenen, welche an den hohlen Umkreis gehen, die durch den Mittelpunct gehende die größte, und von den übrigen jede dieser näher liegende größer als die entferntere; unter denen aber, welche an den erhabenen Umkreis gehen, ist die zwischen dem angenommenen Puncte und dem Durchmesser liegende die kleinste, und von den übrigen jede, der kleinsten nähere, kleiner als die entferntere; auch gehen vom angenommenen Puncte nur zwei gleiche gerade Linien auf beiden Seiten der kleinsten an den Kreis.

Es sei ACN (Fig. 70.) der Kreis, und D der Punct ausser ihm, woraus DA, DE, DF und DC so gezogen sind, daß DA durch den Mittelpunct M geht. Hier ist DA die größte und DG die kleinste dieser Linien. Auch ist $DE > EF$, $DF > DC$, so wie auch $DK < DL$ und $DL < DH$ ist.

Beweis.

Man ziehe aus dem Mittelpuncte M die ME, MF, MC, MH, ML und MK.

I. Hier ist $DM + ME > DE$ (I, 20. S.) Allein

$ME = MA$ (I, 15. Erkl.) folglich

$DM + MA > DE$. Allein

$DM + MA = DA$, folglich

$DA > DE$.

Da nun $ME = MF$ (I, 15. Erkl.) und

$MD = MD$, ferner

$\angle DME > \angle DMF$, so ist

$DE > DF$ (I, 24. S.)

Ganz auf ähnliche Art wird bewiesen, daß $DF > DC$.

II. Ferner ist MK + KD > MD (I, 20. S.) Allein

$$\begin{array}{l} MD = MG + GD. \text{ Also} \\ \hline MK + KD > MG + GD. \text{ Nun ist} \\ MK = MG \text{ (I, 15. Erkl.) daher} \\ \hline MG + KD > MG + GD. \end{array}$$

Folglich auch KG > GD (I, 3. Gr.) oder
DG < DK.

Da nun in den Dreiecken MLD und MKD nach (I, 21. S.)

$$\begin{array}{l} MK + KD < ML + LD, \text{ aber} \\ MK = ML \text{ (I, 15. Erkl.), so ist auch} \\ \hline DK < DL \text{ (I, 3. Gr.)} \end{array}$$

Und eben so wird bewiesen, daß DL < DH.

III. Setzt man an DM den Winkel DMB = Winkel DMK (I, 23. S.) und zieht DB, so ist, weil MB = MK und MD beiden Dreiecken gemein, auch DB = DK (I, 4. S.) Wäre nun ausser der DB noch irgend eine andere, etwa DN, der DK gleich, so müßte auch DN = DB seyn (I, 1. Gr.), welches unmöglich ist, da nach dem Obigen die, der DG näher liegende DB kleiner als die entferntere DN seyn muß.

Oder: Wäre DN = DK, so ziehe man MN. Da hier MN = MK und MD beiden Dreiecken MDK und MDN gemein wäre, so müßte auch ∠ DMK = ∠ DMN (I, 8. S.) seyn.
Allein ∠ DMK = ∠ DMB nach der Annahme;
folglich wäre ∠ DMN = ∠ DMB, welches widersprechend ist (I, 9. Gr.)

Der 9. Satz.

Lehrsatz.

Wenn von einem, innerhalb eines Kreises angenommenen Puncte mehr als zwei gleiche gerade Linien zum Umkreise gehen, so ist dieser Punct des Kreises Mittelpunct.

Es sei ABC (Fig. 71.) der Kreis und D ein Punct in demselben, aus welchem die Linien DA = DB = DC zum Umkreise gehen, so ist D der Mittelpunct des Kreises.

Beweis.

Man ziehe die Verbindungslinien AB und BC und halbire sie in E und F (I, 10. S.) Ferner ziehe man DE und DF, welche beiderseits nach K und G, nach L und H verlängert werden.

Da hier AE = EB, auch
ED = ED und
AD = DB (I, 15. Erkl.) so ist
$\angle$ AED = $\angle$ DEB (I, 8. S.) daher
$\angle$ AED = $\angle$ BED = R (I, 10. Erkl.)

Und es muß in KG der Mittelpunct des Kreises liegen (III, 1. S.)

Auf ähnliche Art wird bewiesen, daß auch in HL der Mittelpunct sei. Folglich ist D dieser Mittelpunct.

Ein anderer Beweis.

Wäre (Fig. 72.) D nicht der Mittelpunct des Kreises, so sei es irgend ein anderer, etwa E. Wird nun DE gezogen, und beiderseits bis zum Umkreise nach F und G verlängert, so ist FG des Kreises Durchmesser, und es wäre DC größer als DB, auch DB größer als DA (III, 8. S.), welches der Annahme DC = DB = DA widerspricht.

Der 10. Satz.

Lehrsatz.

Ein Kreis kann einen andern in nicht mehr als in zwei Puncten durchschneiden.

Der Kreis ABC (Fig. 73.) kann von einem andern nur in zwei Puncten geschnitten werden.

Beweis.

Wenn dieser andere Kreis den Kreis ABC in den drei Puncten D, B und E schnitte, so ziehe man die Linien DB und BE, halbire jene in G, diese in F, errichte aus G die GK lothrecht auf DB und aus F die FC lothrecht auf BE und verlängere sie nach A und H, so muß der Durchschnittspunct L des Kreises ABC Mittelpunct seyn (III, 1. S.) Auf die-

selbe Art wird bewiesen, daß L auch der Mittelpunct des ersten Kreises sei, welches widersprechend ist (III, 5. S.)

Ein anderer Beweis.

Wenn der erste Kreis den andern ABC (Fig. 74.) in dreien Puncten B, E und D schnitte, so nehme man des Kreises ABC Mittelpunct F (III, 1. S.) und ziehe FD, FE und FB, welche einander gleich sind (I, 15. Erkl.) Daher wäre nun (nach III, 9. S.) auch F der Mittelpunct des ersten Kreises, welches widersprechend ist (III, 5. S.)

Der 11. Satz.

Lehrsatz.

Wenn sich zwei Kreise inwendig berühren, so geht jene gerade Linie, welche ihre Mittelpuncte verbindet, hinlänglich verlängert, durch den Berührungspunct beider Kreise.

Wenn sich die Kreise (Fig. 75.) ADE und ABC in A berühren, so liegt dieser Punct A mit den zwei Mittelpuncten in einer geraden Linie.

Beweis.

Man nehme des Kreises ABC Mittelpunct F (III, 1. S.) und ziehe AF. Wäre nun in dieser AF, welche willkührlich verlängert werden kann, nicht auch der Mittelpunct des Kreises ADE, so sei er irgendwo ausser AF, etwa in G. Man ziehe GF und verlängere sie beiderseits nach C und H. Wird nun die AG gezogen, so ist

$AG + GF > AF$ (I, 20. S.) Allein

$AF = FH = HG + GF$ (I, 15. Erkl.) daher

$AG + GF > HG + GF$ und auch

$AG > HG$ (I, 5. Gr.) Nun war aber

$AG = DG$ (I, 15. Erkl.) folglich wäre

$DG > HG$, welches widersprechend ist (III, 5. S.)

Der 12. Satz.

Lehrsatz.

Wenn sich zwei Kreise auswendig berühren, so geht die Verbindungslinie ihrer Mittelpuncte durch den Berührungspunct.

Wenn die beiden Kreise (Fig. 76.) ABC und ADE sich aussen im Puncte A berühren, so geht die Verbindungslinie ihrer Mittelpuncte durch diesen Punct A.

Beweis.

Wenn diese Verbindungslinie eine andere wäre, und etwa die Linie FCDG vom Mittelpuncte F nach dem Mittelpuncte G, so ziehe man die Linien AF und AG. Hier wäre nun

AF = FC (I, 15. Erkl.) auch
AG = GD. Folglich müßte
AF + AG = FC + GD seyn, und daher auch
FA + AG < FC + CD + DG, d. h.
AF + AG < FG, da doch nach dem Frühern
AF + AG > FG seyn muß (I, 20. S.)

Der 13. Satz.

Lehrsatz.

Zwei Kreise können sich von innen oder von aussen nur in einem Puncte berühren.

Beweis.

I. Wenn der Kreis (Fig. 77.) ABCD von einem andern in zwei Puncten B und D von innen berührt werden könnte, so sei E der Mittelpunct des ersten und F jener des zweiten Kreises. Man ziehe die Verbindungslinie EF, so muß diese, beiderseits verlängert, die Berührungspuncte B und D einmal treffen (III, 11. S.)

Da nun E der Mittelpunct des ersten Kreises ist, so muß
DE = EB (I, 15. Erkl.) folglich auch
DF > FB seyn.

Nun ist F der Mittelpunct des andern Kreises, folglich auch DF = FB (I, 15. Erkl.), welches mit jenem, daß DF > FB ist, im Widerspruche steht.

II. Sollte aber der Kreis ABDC von einem andern in den Puncten A und C von aussen berührt werden, so ziehe man die Verbindungslinie AC.

Da sich die Puncte A und C im Umfange des ersten Kreises ABDC befinden, so fällt die Linie AC innerhalb dieses Kreises (III, 2. S.) und daher ausserhalb des andern Kreises (III, 3. Erkl.) Nun sind aber A und C auch zwei Puncte in dem Umfange des andern Kreises, folglich müßte auch die Linie AC innerhalb dieses andern Kreises liegen (III, 2. S.), welches dem Vorigen offenbar widerspricht.

Der 14. Satz.

Lehrsatz.

Wenn in einem Kreise gerade Linien einander gleich sind, so haben sie auch gleiche Entfernung vom Mittelpuncte; und wenn zwei gerade Linien im Kreise vom Mittelpuncte gleiche Entfernung haben, so sind sie einander gleich.

Wenn in dem Kreise (Fig. 78.) ABDC die AB = CD ist, so haben diese Linien vom Mittelpuncte E gleichen Abstand, und wenn zwei Linien AB und CD vom Mittelpuncte E gleichweit abstehen, so ist auch AB = CD.

Beweis.

Man fälle aus E auf AB die EF und auf CD die EG lothrecht (I, 12. S.) und ziehe AE und EC, so muß AF = FB, und CG = GD (III, 3. S.) seyn.

I. Wenn nun AB = CD, so ist auch

$\frac{1}{2}$AB = $\frac{1}{2}$CD oder auch

AF = CG (I, 7. Gr.)

Da nun E des Kreises Mittelpunct ist, so ist auch AE = EC (I, 15. Erkl.) und daher das Quadr. von AE = Quadr. von EC. Da aber die Winkel bei F und G rechte Winkel sind, so ist

Q. AE = Q. AF + Q. EF und auch
Q. EC = Q. CG + Q. EG (I, 47. S.) Daher ist
Q. AF + Q. EF = Q. CG + Q. EG.
Weil aber AF = CG ist, so muß auch
Q. EF = Q. EG (I, 3. Gr.) und demnach
EF = EG seyn, und es haben die Linien AB und CD vom Mittelpuncte E gleichen Abstand (III, 4. Erkl.)

II. Wenn aber AB und CD gleiche Entfernung vom Mittelpuncte E haben, oder wenn EF = EG (III, 4 Erkl.), so ist, weil nun wie zuvor
Q. AF + Q. EF = Q. CG + Q. EG ist, und auch
Q. AF = Q. CG (I, 3. Gr.) nunmehr
AF = CG. Da aber
AB = 2 AF, und
CD = 2 CG, so muß auch
AB = CD seyn (I, 6. G.)

Der 15. Satz.

Lehrsatz.

In dem Kreise ist der Durchmesser die größte Linie, und von den übrigen in ihm gezogenen jede dem Mittelpuncte näher liegende größer als die entferntere.

Es sei ABCD (Fig. 79.) der gegebene Kreis, AD sein Durchmesser und E sein Mittelpunct, so ist AD die größte Linie in demselben, und wenn BC näher beim Mittelpuncte ist als FG, so ist BC größer als FG.

Beweis.

Man ziehe aus E auf BC die EH und auf FG die EK lothrecht (I, 12. S.) so ist EK > EH (III, 5 Erkl.) Daher mache man EL = EH (I, 3. S.), errichte auf EK in L die LM senkrecht und verlängere sie bis N; auch ziehe man EM, EN, EF und EG.

Da nun EH = EL, so ist auch
BC = MN (III, 14. S.) Nun ist aber

$ME + EN > MN$ (I, 20. S.) Daher auch
$ME + EN > BC$. Allein
$ME + EN > AD$ (I, 15. Erkl.) Daher
$AD > BC$. Da ferner
$ME = FE$ und
$EN = EG$ (I, 15. Erkl.) aber
$\angle MEN > \angle FEG$, so ist
$MN > FG$ (I, 24. S.) Es ist aber
$MN = BC$ daher denn
$BC > FG$.

Der 16. Satz.

Lehrsatz.

Ein aus dem Endpuncte des Durchmessers auf denselben errichtetes Loth fällt ausserhalb des Kreises; ferner fällt zwischen dieses Loth und den Umkreis keine andere gerade Linie, und endlich ist der Winkel des Halbkreises größer; sein Rest aber kleiner, als jeder geradlinige spitze Winkel.

Wenn ABC (Fig. 80.) der Kreis, BA sein Durchmesser, und AE das auf seinen Endpunct A errichtete Loth ist, so fällt dasselbe ganz ausserhalb des Kreises; auch kann zwischen dieses Loth AE und den Kreisbogen AHC keine andere gerade Linie fallen. Endlich ist der Winkel, welcher vom Durchmesser BA und dem Bogen AHC gebildet wird, größer; jener aber, welchen das Loth AE mit eben diesem Bogen AHC bildet, kleiner, als jeder spitze Winkel.

Beweis.

I. Wenn dieses Loth AE nicht ganz ausserhalb des Kreises fiele, so nehme man an, es falle innerhalb desselben, wie AC; so, daß nun der Winkel BAC ein Rechter wäre.

Wird nun DC gezogen, so müßte, weil $DC = DA$ (I. 15. Erkl.) nun auch $\angle DCA = \angle DAC$ seyn (I, 5. S.) und es wären in dem Dreiecke CDA zwei Winkel zusammengenommen zweien Rechten gleich, was unmöglich ist (I, 17. S.)

II. Wenn nun zwischen dem Bogen AHC und das Loth AE eine gerade Linie, wie FA fiele, so ziehe man auf diese FA aus D das Loth DG (I, 12. S.) so ist nun, weil DGA ein rechter Winkel ist, auch

$\sphericalangle$ DGA > $\sphericalangle$ DAG (I, 17. S.) daher

DA > DG (I, 19. S.) Allein

DA = DH (I, 15. Erkl.) daher wäre

DH > DG, welches widersprechend ist (I, 9. Gr.)

III. Wäre jener Winkel, welchen der Durchmesser BA mit dem Bogen AHC bildet, nicht größer, und der Winkel, welchen der Bogen AHC mit dem Lothe AE bildet, nicht kleiner, als irgend ein geradliniger spitzer Winkel, welchen der Durchmesser BA und eine gerade Linie bildete, so müßte diese gerade Linie zwischen den Bogen AHC und das Loth AE fallen, wie etwa AF, welches nach dem Vorigen unmöglich ist.

Zusatz.

Hieraus folgt nun, daß ein aus dem Endpuncte des Durchmessers auf ihn errichtetes Loth den Kreis berührt, und daß eine gerade Linie den Kreis nur in einem Puncte berühren kann, da jede gerade Linie, welche zwei Puncte des Umkreises verbindet, innerhalb des Kreises liegt (III, 2. S.)

Der 17. Satz.

Aufgabe.

Von einem ausserhalb des Kreises gegebenen Puncte eine gerade Linie an den Kreis zu ziehen, welche ihn in einem Puncte berührt.

Wenn (Fig. 81.) CDB der gegebene Kreis und A der gegebene Punct ist, so soll von A eine gerade Linie gezogen werden, welche den Kreis CDB in einem Puncte berührt.

Auflösung.

Man nehme des Kreises Mittelpunct E (III, 1. S.) ziehe EA und beschreibe aus E mit dieser Linie EA den Kreis AFG, errichte auf AE aus D die Linie DF lothrecht (I, 11. S.)

ziehe sowohl EBF als AB, so ist AB jene Linie, welche den Kreis CDB in einem Puncte berührt.

Beweis.

Da hier EA = EF (I, 15. Erkl.) ferner
EB = ED, endlich
∠ AEF = ∠ AEF, so ist auch
∠ EBA = ∠ EDF (I, 4. S.) Allein
∠ EDF = R, folglich
∠ EBA = R. Daher steht die AB lothrecht auf EB und kann somit den Kreis CDB nur in einem Puncte berühren (III, 16. S.)

Der 18. Satz.

Lehrsatz.

Wenn eine gerade Linie den Kreis berührt und man zieht vom Mittelpuncte nach dem Berührungspuncte eine andere gerade, so steht diese auf der Berührungslinie lothrecht.

Wenn DE (Fig. 82.) die Berührungslinie des Kreises ABC im Puncte C ist, und man zieht FC, so ist FC ein Loth auf DE.

Beweis.

Wenn diese FC nicht senkrecht auf DE wäre, so sei es irgend eine andere von F nach DE gezogene Linie, etwa FG. Daher wäre ∠ FGC = R, und somit
∠ FCG < ∠ FGC (I, 17. S.) Daher denn auch
FC > FG (I, 19. S.) Es ist aber
FC = FB (I, 15. Erkl.), folglich wäre
FB > FG, welches unmöglich ist (I, 9. Gr.)

Der 19. Satz.

Lehrsatz.

Wenn man aus dem Berührungspuncte einer den den Kreis berührenden geraden Linie ein Loth auf sie errichtet, so liegt in demselben des Kreises Mittelpunct.

Wenn (Fig. 83.) DE den Kreis ABC in C berührt und CA lothrecht auf DE steht, so muß in CA der Mittelpunct des Kreises seyn.

B e w e i s.

Wenn der Mittelpunct des Kreises nicht in CA liegt, so liege er ausserhalb derselben, etwa in F. Zieht man die gerade FC, so muß

$\sphericalangle$ FCE = R seyn (III, 18. S.) Es ist aber
$\sphericalangle$ ACE = R, nach der Annahme, folglich wäre
$\sphericalangle$ ACE = FCE, welches widersprechend ist (I, 9. Gr.)

D e r 20. S a t z.

L e h r s a t z.

In jedem Kreise ist der Winkel am Mittelpuncte (Centriwinkel) noch einmal so groß, als der Winkel am Umfange (Peripheriewinkel), wenn beide auf dem nämlichen Bogen stehen.

Es sei (Fig. 84.) im Kreise ABC der Winkel BEC auf dem nämlichen Bogen, worauf $\sphericalangle$ BAC steht, so ist jener noch einmal so groß, als dieser.

B e w e i s.

I. Es befinde sich des Kreises Mittelpunct E zwischen den Schenkeln des Peripheriewinkels BAC.

Wenn man die AE zieht und bis F verlängert, so ist

EA = EB (I, 15. Erkl.) daher
$\sphericalangle$ EAB = $\sphericalangle$ EBA (I, 5. S.) und
$\sphericalangle$ BEF = 2 $\sphericalangle$ EAB (I, 32. S.)

Ganz auf ähnliche Art wird bewiesen, daß

$\sphericalangle$ FEC = 2 $\sphericalangle$ FAC, daher ist
$\sphericalangle$ BEF + $\sphericalangle$ FEC = 2 $\sphericalangle$ BAF + 2 $\sphericalangle$ FAC, folglich
$\sphericalangle$ BEC = 2 $\sphericalangle$ BAC.

II. Befindet sich aber des Kreises Mittelpunct E ausserhalb der Schenkel des Peripheriewinkels BDC, so ziehe man DE und verlängere sie nach G. Nun wird auf ähnliche Art, wie zuvor bewiesen, daß

∢ GEC = 2 ∢ GDC, und auch
∢ GEB = 2 ∢ GDB ist, daher muß auch
∢ BEC = 2 ∢ BDC seyn (I, 3. Gr.)

Der 21. Satz.

Lehrsatz.

In jedem Kreise sind die Winkel, welche in einerlei Abschnitten liegen, einander gleich.

Es sei AEDB (Fig. 85.) der gegebene Kreis und BDEAB ein Abschnitt in ihm, in welchem sich die Winkel BAD und BED befinden, so ist ∢ BAD = ∢ BED.

Beweis.

Man nehme des Kreises Mittelpunct F, und ziehe FB und FD, so ist

∢ BFD ∢ 2 ∢ BAD (III, 20. S.) und
∢ BFD = 2 ∢ BED. Folglich ist auch
2 ∢ BAD = 2 ∢ BED und
∢ BAD = ∢ BED.

Der 22. Satz.

Lehrsatz.

Wenn sich im Kreise eine vierseitige Figur befindet, so sind ihre gegenüberliegende Winkel paarweise zweien Rechten gleich.

Es sei (Fig. 86.) in dem Kreise ABCD das Viereck ABCD beschrieben, so ist

∢ ABC + ∢ ADC = 2R und auch
∢ DAB + ∢ DCB = 2R.

Beweis.

Wenn man die Querlinien AC und DB zieht, so ist

∢ CDB = ∢ BAC, und
∢ BDA = ∢ ACB (III, 21. S.) Folglich ist
∢ ADC = ∢ BAC + ∢ ACB (I, 2. Gr.) allein
∢ ABC = ∢ ABC, somit

$\sphericalangle ADC + \sphericalangle ABC = \sphericalangle BAC + \sphericalangle ACB + \sphericalangle ABC$. Allein $\sphericalangle BAC + \sphericalangle ACB + \sphericalangle ABC = 2R$ (I, 32. S.) Folglich ist

$$\sphericalangle ADC + \sphericalangle ABC = 2R.$$

Auf ähnliche Art wird auch bewiesen, daß $\sphericalangle BAD + \sphericalangle DCB = 2R$.

Der 23. Satz.

Lehrsatz.

Auf einer gegebenen geraden Linie können nicht zwei Kreisabschnitte an einerlei Seite beschrieben werden, welche einander ähnlich und ungleich sind.

Auf die gegebene Linie AB (Fig. 87.) können nach einer Seite hin nicht zwei ähnliche, aber ungleiche Kreisabschnitte beschrieben werden.

Beweis.

Wenn zwei solcher Kreisabschnitte auf AB möglich wären, so seien ACB und ADB dieselbe. Zieht man hier die AD willkührlich, verlängert sie über D bis C und zieht nun die Linien BD und BC, so müßte, weil beide Abschnitte einander ähnlich wären, $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ACB$ seyn (III, 11. Erkl.) welches widersprechend ist (I, 16. S.)

Der 24. Satz.

Lehrsatz.

Wenn ähnliche Kreisabschnitte über gleichen geraden Linien stehen, so sind sie einander gleich.

Es seien die Kreisabschnitte (Fig. 88.) AEB und CFD auf den gleichen geraden Linien $AB = CD$ errichtet, so sind sie einander selbst gleich.

Beweis.

Man bringe den Abschnitt AEB so über den Abschnitt CFD, daß A auf C und AB längs CD fällt, so muß, weil $AB = CD$, auch B auf D fallen. Da nun die Abschnitte AEB und CFD, über CD liegend, einander ähnlich sind, so können sie nicht ungleich seyn (III, 23. S.)

Der 25. Satz.

Aufgabe.

Wenn ein Kreisabschnitt gegeben ist, so soll der ihm zugehörige Kreis beschrieben werden.

Es sei ABC (Fig. 89.) der gegebene Abschnitt, und man soll den Kreis beschreiben, welchem er angehört.

Auflösung.

Man halbire AC in D (I, 10. S.) und ziehe auf AC aus D die DB lothrecht (I, 11. S.) Wenn nun die gerade Linie AB gezogen ist, so ist entweder

∢ ABD > ∢ BAD, oder

∢ ABD = ∢ BAD, oder ∢ ABD < ∢ BAD.

Beweis.

I. Wenn ∢ABD>∢BAD ist, so setze man an BA den Winkel BAE, welcher dem Winkel ABD gleich ist (I, 23. S.) und verlängere BD bis E, Hier ist nun

EA = EB (I, 6. S.) und weil ferner

AD = DC, auch

DE = DE, und endlich

∢ ADE = ∢ CDE = R (I, 4. S.) so muß auch

AE = EC seyn (I, 4. S.) daher ist

EA = EB = EC und folglich der Punct E Mittelpunct des Kreises ABC (III, 9. S.)

In diesem Falle muß der Abschnitt ABC kleiner als der Halbkreis seyn, da der Mittelpunct E ausserhalb dieses Abschnittes liegt.

II. Wenn aber (Fig. 90.) ∢ ABD = ∢ BAD, so ist auch AD = BD (I, 6. S.) Nun ist aber AD = DC, daher auch D der Mittelpunct des Kreises ABC (III, 9. S.)

In diesem Falle ist der Abschnitt ABC ein Halbkreis, weil AC der Durchmesser ist.

III. Wenn aber (Fig. 91.) ∢ABD<∢BAD, so setze man an BA einen Winkel BAE, welcher dem Winkel ABD gleich ist (I, 23. S.) und ziehe EC, so wird auf vollkommen

ähnliche Art wie zuvor bewiesen, daß AE = EB = EC und folglich E der Mittelpunct des Kreises ABC ist.

In diesem Falle muß der Abschnitt ABC größer als ein Halbkreis seyn, weil sich der Mittelpunct E innerhalb des Abschnittes befindet.

Der 26. Satz.

Lehrsatz.

Wenn in gleichen Kreisen gleiche Centriwinkel oder gleiche Peripheriewinkel vorhanden sind, so stehen sie auf gleichen Bogen.

Wenn in den Kreisen (Fig. 92.) ABKC und DELF die gleichen Centriwinkel BGC und EHF oder die gleichen Peripheriewinkel BAC und EDF gegeben sind, so ist der Bogen BKC dem Bogen ELF gleich.

Beweis.

Wenn man die Linien BC und EF zieht, so ist, weil die beiden Kreise einander gleich sind,

BG = GC = EH = HF (III, 1. Erkl.) Nun ist aber
∢BGC = ∢EHF, folglich auch
BC = EF (I, 4. S.) weil aber ferner
∢BAC = ∢EDF, so sind die Segmente BAC und EDF einander ähnlich (III, 11. Erkl.), daher auch einander gleich (III, 24. S.) Da nun aber auch die ganzen Kreise einander gleich sind, so müssen es ebenso die andern Segmente BKC und ELF und folglich auch die Bogen BKF und ELF seyn.

Der 27. Satz.

Lehrsatz.

Wenn in gleichen Kreisen Centriwinkel oder Peripheriewinkel auf gleichen Bogen stehen, so sind sie einander gleich.

Wenn in den gleichen Kreisen (Fig. 93.) ABC und DEF die Centriwinkel BGC und EHF oder die Peripheriewinkel BAC

und EDF auf gleichen Bogen BC und EF stehen, so ist ∡ BGC = ∡ EHF und ∡ BAC = ∡ EDF.

Beweis.

Wenn ∡ BGC = ∡ EHF, so ist auch
∡ BAC = ∡ EDF (III, 20. S.)

Wenn nun die Winkel BGC und EHF einander ungleich wären, so sei etwa ∡ BGC > ∡ EHF. Nimmt man nun
∡ BGK = ∡ EHF, so ist
Bog. BK = Bog. EF (III, 26. S.) Es ist aber
Bog. BC = Bog. EF nach der Annahme; folglich müßte Bog. BC = Bog. BK seyn, welches widersprechend ist (I, 9. Gr.)

Der 28. Satz.

Lehrsatz.

In gleichen Kreisen sind die von gleichen geraden Linien abgeschnittenen Bogen einander gleich, nämlich der größere dem größern, und der kleinere dem kleinern.

Wenn in den gleichen Kreisen (Fig. 94.) ABC und DEF die Linie BC = EF ist, so muß auch Bog. BAC = Bog. EDF und Bog. BGC = Bog. EHF seyn.

Beweis.

Man nehme der gegebenen Kreise Mittelpuncte K und L, und ziehe die Linien BK, KC, EL und LF, so ist, da beide Kreise einander gleich sind,
BK = KC = EL = LF (III, 1. Erkl.)
Es ist aber auch BC = EF, folglich
∡ BKC = ∡ ELF (I, 8. S.) daher denn
Bog. BGC = Bog. EHF (III, 26. S.) und somit auch, weil beide Kreise einander gleich sind, Bog. BAC = Bog. EDF.

Der 29. Satz.

Lehrsatz.

Wenn in gleichen Kreisen gerade Linien gleiche Bogen abschneiden, so sind diese gerade Linien einander gleich.

Es seien in den gleichen Kreisen (Fig. 95.) ABC und DEF durch die Linien BC und EF die gleichen Bogen BGC und EHF abgeschnitten, so ist BC = EF.

Beweis.

Wenn man der beiden Kreise Mittelpuncte K und L nimmt, und die Linien BK, KC, EL und LF zieht, so muß
BK = KC = EL = LF seyn (III, 1. Erkl.) Da aber
Bog. BGC = Bog. EHF, so ist ∠ BKC = ∠ ELF (III, 27. S.) und daher BC = EF (I, 4. S.)

Der 30. Satz.

Aufgabe.

Einen gegebenen Kreisbogen zu halbiren.

Es sei ADB (Fig. 96.) der gegebene Kreisbogen, und man soll denselben halbiren.

Auflösung.

Man ziehe die Verbindungslinie AB, halbire sie in C (I, 10. S.), errichte aus C auf AB die CD lothrecht (I, 11. S.)

Beweis.

Da hier AC = CB, ferner
CD = CD und
∠ ACD = ∠ BCD = R, so ist, wenn die Linien AD und DB gezogen werden, auch
AD = DB (I, 4. S.) folglich auch
Bog. AD = Bog. DB (III, 28. S.)

Der 31. Satz.

Lehrsatz.

Der Winkel im Halbkreise ist ein Rechter, aber der Winkel im größern Abschnitte ist kleiner, als

ein Rechter und der Winkel im kleinern Abschnitte ist größer, als ein Rechter; auch ist der Winkel des größern Abschnittes größer und der Winkel des kleinern Abschnittes kleiner, als ein Rechter.

Es sei (Fig. 97.) ABCD der gegebene Kreis, BC sein Durchmesser, E sein Mittelpunct, auch seien BA, AC, AD und DC gezogen, so ist $\measuredangle BAC = R$; aber $\measuredangle ABC < R$ und $\measuredangle ADC > R$. Ferner ist der Winkel des größern Abschnittes, welcher vom Bogen CBA und der geraden Linie AC gebildet wird, größer als ein Rechter; der Winkel aber, welcher von dem Bogen CDA und der geraden Linie AC gebildet wird, kleiner als ein Rechter.

Beweis.

I. Man ziehe EA und verlängere BA über A nach F. Da hier $EB = EA$ (I, 15. Erkl.) und

$EA = EC$, so ist auch

$\measuredangle EAB = \measuredangle EBA$ (I, 5. S.) und

$\measuredangle EAC = \measuredangle ECA$, daher auch

$\measuredangle BAC = \measuredangle EBA + \measuredangle ECA$ (I, 2. Gr.)

Es ist aber $\measuredangle FAC = \measuredangle EBA + \measuredangle ECA$ (I, 32. S.) daher auch $\measuredangle BAC = \measuredangle FAC$ (I, 1. Gr.) somit $\measuredangle FAC = \measuredangle BAC = R$ (I, 10. Erkl.)

Oder: Da $\measuredangle AEC = 2 \measuredangle BAE$ (I, 32. S.) und

$\measuredangle AEB = 2 \measuredangle EAC$, so ist auch

$\measuredangle AEC + \measuredangle AEB = 2 \measuredangle BAC$. Es ist aber

$\measuredangle AEC + \measuredangle AEB = 2R$ (I, 13. S.) daher auch

$2 \measuredangle BAC = 2R$ und endlich

$\measuredangle BAC = R$.

II. Da in dem Dreiecke ABC, nach dem Frühern,

$\measuredangle ABC + \measuredangle BAC < 2R$ (I, 32. S.) aber

$\measuredangle BAC = R$, so muß auch

$\measuredangle ABC < R$ seyn.

III. Da nun in der vierseitigen Figur BADC, nach dem Frühern, $\measuredangle ABC + \measuredangle ADC = 2R$ (III, 22. S.) aber

$\measuredangle ABC < R$, so ist auch

$\measuredangle ADC > R$.

IV. Daß der von dem Bogen CBA und der geraden Linie AC gebildete Winkel größer, als der Rechte sei, folgt offenbar daraus, daß er größer, als der rechte Winkel CAB ist.

V. Daß aber der von dem Bogen CDA und der geraden Linie AC gebildete Winkel kleiner, als ein Rechter sei, geht daraus hervor, daß er kleiner, als der rechte Winkel CAF ist.

Zusatz.

Hieraus folgt, daß, wenn in einem Dreiecke ein Winkel so groß ist, als die beiden übrigen zusammen, jener Winkel ein Rechter sei, weil sein Nebenwinkel diesen beiden andern, und daher ihm selbst gleich ist, folglich ein Rechter seyn muß (I, 10. Erkl.)

Der 32. Satz.

Lehrsatz.

Wenn eine gerade Linie den Kreis berührt, und aus diesem Berührungspuncte eine andere gerade den Kreis schneidet, so sind die Winkel, welche sie mit der berührenden Linie bildet, den Winkeln in den verwechselten Kreisabschnitten gleich.

Der Kreis (Fig. 98.) ABCD habe EF in B zur Berührungslinie, und BD sei die schneidende, so sind die Winkel, welche DB mit EF bildet, den Winkeln in den verwechselten Kreisabschnitten gleich; das heißt, der Winkel FBD ist dem Winkel in dem Abschnitte BAD, und der Winkel EBD dem Winkel in dem Abschnitte DCB gleich.

Beweis.

Man errichte auf EF aus dem Puncte B die BA lothrecht (I, 11. S.), nehme in dem Bogen BD einen willkührlichen Punct C und ziehe die geraden BC, CD und DA.

Da sich in dem Lothe BA der Mittelpunct des Kreises befindet (III, 19. S.), so ist BA des Kreises Durchmesser, und

$\sphericalangle$ ADB = R (III, 31. S.) und daher

$\sphericalangle$ ADB = $\sphericalangle$ ABF, somit auch

$\sphericalangle$ ADB = $\sphericalangle$ DAB + $\sphericalangle$ ABD (I, 32. S.) Folglich

$\sphericalangle$ DAB + $\sphericalangle$ ABD = $\sphericalangle$ ABF, da aber

$\sphericalangle$ ABD = $\sphericalangle$ ABD, so ist

$\sphericalangle$ DAB = $\sphericalangle$ FBD (I, 3. Gr.) Da ferner

$\angle$ FBD + $\angle$ EBD = 2R (I, 13. S.) und in der vierseitigen Figur ABCD auch

$\angle$ DAB + $\angle$ DCB = 2R (III, 22. S.), so ist

$\angle$ DAB + $\angle$ DCB = $\angle$ FBD + $\angle$ EBD. Nun ist aber

$\angle$ DAB = $\angle$ FBD, daher auch

$\angle$ DCB = $\angle$ EBD (I, 3. Gr.)

Der 33. Satz.

Aufgabe.

Auf einer gegebenen geraden Linie einen Kreisabschnitt zu beschreiben, welcher einen gegebenen geradlinigen Winkel in sich fasset.

Wenn (Fig. 99.) AB die gegebene gerade Linie ist, so soll auf derselben ein Kreisabschnitt gebildet werden, welcher den gegebenen Winkel C in sich fasset.

Auflösung.

Der gegebene geradlinige Winkel C ist entweder ein spitzer, oder ein rechter, oder ein stumpfer Winkel.

I. Wenn $\angle$ C < R, so lege man an A der Linie BA den Winkel BAD = $\angle$ C (I, 23. S.) wodurch BAD < R ist. Nun errichte man aus A auf DA das Loth AE (I, 11. S.) halbire AB in F (I, 10. S.) errichte aus F auf AB das Loth FG, und ziehe GB.

Beweis.

Da hier AF = FB, ferner

FG = FG, und endlich

$\angle$ AFG = $\angle$ BFG = R, so ist

AG = GB (I, 4. S.) Nun beschreibe man aus G mit GA = GB den Kreis ABE und ziehe BE.

Da nun die AD auf dem Durchmesser AE senkrecht ist, so berührt sie den Kreis in A (III, 16. S.) und es ist

$\angle$ BAD = $\angle$ AEB (III, 32. S.) Allein

$\angle$ BAD = $\angle$ C, folglich auch

$\angle$ AEB = C.

II. Wenn (Fig. 100.) $\angle$ C = R ist, so setze man an BA den Winkel BAD = $\angle$ C (I, 23. S.), halbire AB in F, beschreibe aus F mit FA = FB den Kreis AEB, nehme in seinem Umfange einen willkührlichen Punct E und ziehe AE und EB.

Beweis.

Es ist klar, daß AD wieder eine Tangente des Kreises (III, 16. S.) und daher ∡ BAD = ∡ C = ∡ AEB ist (III, 32. S.)

III. Wenn (Fig. 101.) ∡ C > R, so setze man an BA den Winkel BAD = ∡ C (I, 23. S.), errichte auf DA in A die AE lothrecht (I, 11. S.), halbire AB in F, errichte auf sie aus F die FG senkrecht, und ziehe GB. Nun ist, weil AF = FB, FG = FG und ∡ AFG = ∡ BFG = R, auch AG = BG (I, 4. S.) Daher beschreibe man aus G mit GA = GB den Kreis AEB, nehme in dem Bogen AB den willkührlichen Punct H und ziehe HA und HB.

Beweis.

Da wiederum AD auf dem Durchmesser AE lothrecht steht, so ist sie eine Tangente (III, 16. S.), folglich muß ∡ BAD = ∡ C = ∡ AHB seyn (III, 32. S.)

Der 34. Satz.

Aufgabe.

Wenn ein Kreis gegeben ist, so soll man von demselben ein Segment abschneiden, worin der Winkel einem gegebenen Winkel gleich ist.

Es sei (Fig. 102.) ABC der gegebene Kreis, von welchem ein Segment abzuschneiden ist, welches den gegebenen Winkel D enthält.

Auflösung.

Man ziehe an den gegebenen Kreis eine Tangente EBF (III, 17. S.), setze an FB im Berührungspuncte B einen Winkel FBC = ∡ D (I, 23. S.), nehme in dem Umfange BAC einen willkührlichen Punct A und ziehe die geraden Linien BA und AC.

Beweis.

Da die Linie EF eine Tangente des Kreises ABC ist, so muß auch ∡ FBC = ∡ BAC seyn (III, 32. S.) Allein
∡ FBC = ∡ D, folglich
∡ BAC = ∡ D.

Der 35. Satz.

Lehrsatz.

Wenn sich in einem Kreise zwei gerade Linien durchschneiden, so ist das Rechteck aus den Abschnitten der einen dem Rechtecke aus den Abschnitten der andern gleich.

Wenn sich in dem Kreise ABCD (Fig. 103.) die geraden Linien AC und BD im Puncte E durchschneiden, so ist das aus AE und EC zu bildende Rechteck dem Rechtecke aus BE und ED gleich.

Beweis.

I. Wenn der Durchschnittspunct der beiden Linien im Kreise sein Mittelpunct ist, wie Fig. 103., so sind die Abschnitte AE und EC, BE und ED einander gleich (I, 15. Erkl.) und es muß daher das Rechteck aus AE und EC dem Rechtecke aus BE und BC gleich seyn.

II. Wenn aber (Fig. 104.) der Durchschnittspunct E der sich schneidenden Linien AC und BD nicht der Mittelpunct des Kreises ist, so sei F dieser Mittelpunct. Zieht man nun aus F auf AC das Loth FG, und auf BD das Loth FH, und dann die Linien FB, FE und FC, so ist

AG = GC (III, 3. S.) also

Recht. aus AE u. EC + Q. GE = Q. GC (II, 5. S.) Aber

Q. GF = Q. GF. Daher

Recht. aus AE u. EC + Q. GE + Q. GF = Q. GC + Q. GF (I, 2. Gr.) Weil aber bei G rechte Winkel sind, so ist auch

Q. GE + Q. GF = Q. FE (I, 47. S.) und

Q. GC + Q. GF = Q. FC, daher ist

Recht. aus AE u. EC + Q. FE + Q. FC.

Auf ganz ähnliche Art wird bewiesen, daß

Recht. aus DE u. EB + Q. FE + Q. FC, folglich ist

Recht. aus AE u. EC + Q. FE = Recht. aus DE u. EB + Q. FE.

Und daher auch, wenn beiderseits Q. FE weggenommen wird,

Recht. aus AE u. EC = Recht. aus DE u. EB.

Der 36. Satz.

Lehrsatz.

Wenn man ausserhalb des Kreises einen willkührlichen Punct nimmt, von welchem eine den Kreis schneidende und eine andere ihn berührende Linie gezogen wird, so ist das Rechteck aus der ganzen schneidenden Linie und ihrem ausserhalb des Kreises liegenden Abschnitte dem Quadrate der berührenden Linie gleich.

Wenn vom Puncte D (Fig. 105.) die Linie DA den Kreis CBA in C und A schneidet und die Linie DB denselben in B berühret, so ist das Rechteck aus AD und DC dem Quadrate von DB gleich.

Beweis.

I. Wenn sich der Mittelpunct des Kreises, nämlich E, in der Linie DA befindet, so ziehe man die gerade EB. Hier ist

EB = EA = EC (I, 15. Erkl.) und

∡ EBD = R (III, 18. S.) Daher denn

Q. ED = Q. DB + Q. BE (I, 47. S.) Es ist aber

Recht. aus AD u. DC + Q. CE = Q. ED (II, 6. S.)

oder, weil EC = EB ist,

Recht. aus AD u. DC + Q. BE = Q. ED. Daher

Recht. aus AD u. DC + Q. BE = Q. DB + Q. BE.

Nimmt man nun beiderseits Q. BE hinweg, so bleibt

Recht. aus AD und DC = Q. DB.

II. Wenn sich aber des Kreises Mittelpunct E (Fig. 106.) nicht in der Linie DA befindet, so ziehe man aus E auf AC das Loth EF (I, 12. S.), so ist AF = FC (III, 3. S.) Zieht man ferner die Linien EB, EC und ED, so ist

Recht. aus AD u. DC + Q. FC = Q. FD (II, 6. S.)

Da nun Q. FE = Q. FE, so ist

Recht. aus AD u. DC + Q. FC + Q. FE = Q. FD + Q. FE (I, 2. Gr.) Da aber bei F rechte Winkel sind, so ist

Q. FC + Q. FE = Q. EC (I, 47. S.) oder

Q. FC + Q. FE = Q. EB (I, 15. Erkl.) und

Q. FD + Q. FE = Q. DE (I, 47. S.)

= □. DB + □. EB. Daher ist Recht. aus AD und DC + □. EB = □. DB + □. EB, nimmt man nun beiderseits □. EB hinweg, so bleibt Recht. aus AD und DC = □. DB.

Der 37. Satz.

Lehrsatz.

Wenn von einem Puncte ausserhalb des Kreises zwei gerade Linien zum Kreise gehen, deren eine denselben schneidet, die andere aber ihn trifft, und es ist das Rechteck aus der ganzen schneidenden Linie und ihrem ausserhalb des Kreises liegenden Abschnitte dem Quadrate der treffenden Linie gleich, so ist diese treffende Linie eine Tangente des Kreises.

Wenn vom Puncte D (Fig. 107.) die schneidende Linie DCA und die den Kreis treffende Linie DB an denselben gehet, und es ist das Recht. aus DA und DC dem Quadrate der Linie DB gleich, so ist DB eine Tangente des Kreises ABCE.

Beweis.

Man ziehe aus D die Tangente DE an den Kreis (III, 17. S.), nehme des Kreises Mittelpunct F (III, 1. S.) und ziehe FE, FB und FD. Da nun die Linie DE den Kreis berührt und DA ihn schneidet, so ist Recht. aus AD u. DC = Quadr. DE (III, 36. S.) Es ist aber Recht. aus AD u. DC = Quadr. DB; daher auch Quadr. DB = Quadr. DE, und folglich

DB = DE. Es ist aber
FB = FE (I, 15. Erkl.) auch
FD = FD, daher

∡ FBD = ∡ FED (I, 8. S.) Allein
∡ FED = R, daher auch
∡ FBD = R, und folglich die DB auf BF lothrecht, und somit auch eine Tangente des Kreises ABCE (III, 16. S.)

Ganz auf ähnliche Art wird der Beweis geführt, wenn sich des Kreises Mittelpunct F in der schneidenden Linie DA befindet.

Ende des dritten Buchs.

Das
vierte Buch
der
Elemente des Euclides.

Dieses Buch handelt:

1. Von der Construction des Dreiecks in und um den Kreis, und umgekehrt von Construction des Kreises in und um das Dreieck. Satz 1—5.

2. Von der Construction des Quadrates in und um den Kreis, und umgekehrt. Satz 6—9.

3. Von regelmäßigen Vielecken in und um den Kreis, und umgekehrt. Satz 10—16.

Erklärungen des vierten Buches.

1. Eine geradlinige Figur heißt in eine andere geradlinige Figur beschrieben, wenn der Scheitel jedes Winkels der einbeschriebenen eine Seite derjenigen berührt, worin sie beschrieben ist.

2. Eine geradlinige Figur heißt um eine andere geradlinige Figur beschrieben, wenn jede Seite der umschriebenen den Scheitel eines Winkels derjenigen berührt, um welche sie beschrieben ist.

3. Eine geradlinige Figur heißt in einen Kreis beschrieben, wenn der Scheitelpunct jedes Winkels der einbeschriebenen Figur den Umfang des Kreises berührt.

4. Eine geradlinige Figur heißt um einen Kreis beschrieben, wenn jede Seite der umschriebenen Figur den Umfang des Kreises berührt.

5. Ein Kreis heißt in eine geradlinige Figur beschrieben, wenn der Umfang des Kreises jede Seite der Figur, in welche er beschrieben ist, berührt.

6. Ein Kreis heißt um eine geradlinige Figur beschrieben, wenn der Umfang des Kreises den Scheitel jedes Winkels der Figur, um welche er beschrieben ist, berührt.

7. Eine gerade Linie heißt in einen Kreis eingetragen, wenn sich ihre Endpuncte in dem Umfange des Kreises befinden.

Der 1. Satz.

Aufgabe.

In einen gegebenen Kreis eine gegebene gerade Linie einzutragen, welche nicht größer, als sein Durchmesser ist.

Es sei (Fig. 108.) CABF der gegebene Kreis, und D die gegebene Linie, welche in denselben eingetragen werden soll.

Auflösung.

Man ziehe den Durchmesser BC. Wenn nun BC = D ist, so ist das Verlangte geschehen. Ist aber BC > D, so nehme man CE = D (I, 3. S.) beschreibe aus C mit dieser CE den Kreis AEF und ziehe die gerade CA.

Beweis.

Da C der Mittelpunct des Kreises AEF ist, so ist auch

CA = CE (I, 15. S.) Allein
CE = D, nach der Annahme;
folglich auch CA = D.

Der 2. Satz.

Aufgabe.

In einen gegebenen Kreis ein Dreieck zu beschreiben, dessen Winkel den Winkeln eines gegebenen Dreiecks, einzeln genommen, gleich sind.

Es sei (Fig. 109.) BAC der gegebene Kreis und FED das gegebene Dreieck. Man soll in den Kreis ein Dreieck ABC beschreiben, worin ∢ BAC = ∢ F, ∢ B = ∢ E, und ∢ C = ∢ D ist.

Auflösung.

Man ziehe an den gegebenen Kreis durch den willkührlichen Punct A die Tangente GAH (III, 17. S.) lege an A den ∢ HAC = ∢ E (I, 23. S.) und ∢ GAB = ∢ D, und ziehe die Verbindungslinie BC.

Beweis.

Da GAH eine Tangente des Kreises ist, so ist auch

∢ HAC = ∢ ABC (III, 32. S.) und
∢ GAB = ∢ ACB. Es ist aber
∢ HAC = ∢ E und
∢ GAB = ∢ D, folglich auch
∢ ABC = ∢ E und
∢ ACB = ∢ D (I, 1. Gr.) Daher muß auch

$\angle$ BAC $=$ $\angle$ F seyn (I, 32. S.) und demnach ist $\triangle$ ABC gleichwinkelig mit $\triangle$ FED.

Der 3. Satz.

Aufgabe.

Um einen gegebenen Kreis ein Dreieck, zu beschreiben, dessen drei Winkel den drei Winkeln eines gegebenen Dreiecks, einzeln genommen, gleich sind.

Es sei (Fig. 110.) ABC der gegebene Kreis und DEF das gegebene Dreieck. Man soll um den Kreis ein Dreieck LMN beschreiben, worin $\angle$ L $=$ $\angle$ D, $\angle$ M $=$ $\angle$ DEF und $\angle$ N $=$ $\angle$ DFE ist.

Auflösung.

Man verlängere die EF über F und E willkührlich nach H und G, nehme des Kreises Mittelpunct K (III, 1. S.) ziehe aus K die KB willkührlich, lege an K den $\angle$ BKA $=$ $\angle$ DEG, und den $\angle$ BKC $=$ $\angle$ DFH (I, 23. S.) und ziehe durch A, B und C die Tangenten LAM, MBN und NCL (III, 17. S.) so sind bei A, B und C rechte Winkel (III, 18. S.)

Beweis.

Da man die vierseitige Figur AMBK durch eine Diagonale in zwei Dreiecke theilen kann, so sind ihre vier Winkel zusammengenommen $=$ 4R (I, 32. S.) Nun ist aber

$\angle$ MAK $=$ $\angle$ MBK $=$ R, folglich auch
$\angle$ AKB $+$ $\angle$ AMB $=$ 2R. Da aber
$\angle$ DEG $+$ $\angle$ DEF $=$ 2R (I, 13. S.) so ist auch
$\angle$ AKB $+$ $\angle$ AMB $=$ $\angle$ DEG $+$ $\angle$ DEF.
Allein es ist $\angle$ AKB $=$ $\angle$ DEG. Daher auch
$\angle$ AMB $=$ $\angle$ DEF (I, 3. Gr.)

Ganz auf ähnliche Art wird bewiesen, daß
$\angle$ BNC $=$ $\angle$ DFE ist; folglich muß auch
$\angle$ MNL $=$ $\angle$ EDF seyn (I, 32. S.)

Es sind daher die beiden Dreiecke MLN und DEF gleichwinkelig.

Der 4. Satz.

Aufgabe.

In ein gegebenes Dreieck einen Kreis zu beschreiben.

Wenn (Fig. 111.) ABC das gegebene Dreieck ist, so soll in dasselbe ein Kreis beschrieben werden.

Auflösung.

Man halbire den Winkel ABC durch die Linie BD (I, 9. S.) und den Winkel BCA durch die Linie CD, so müssen diese, gehörig verlängert, in D zusammentreffen (I, 11. Gr.) Ferner ziehe man aus D auf BC das Loth DF, auf AB das Loth DE und auf AC das Loth DG.

Beweis.

Da hier ∡ EBD = ∡ DBF, auch
∡ BED = ∡ BFD = R und
BD = BD, so ist
DE = DF (I, 26. S.)

Auf ganz ähnliche Art wird auch bewiesen, daß DF = DG; daher auch DE = DG. Da nun DE = DF = DG ist, so muß der aus D mit einer dieser drei Linien beschriebene Kreis die Seite AB in E, BC in F und CA in G berühren, weil sich bei E, F und G rechte Winkel befinden (III, 16. S.)

Der 5. Satz.

Aufgabe.

Um ein gegebenes Dreieck einen Kreis zu beschreiben.

Wenn (Fig. 112.) ABC das gegebene Dreieck ist, so soll um dasselbe ein Kreis beschrieben werden.

Auflösung.

Wenn man die Linie AB in D und die Linie AC in E halbirt (I, 10. S.), und aus D auf AB das Loth DF, aus E aber auf AC das Loth EF errichtet (I, 11. S.), so müssen sich beide, gehörig verlängert, in F durchschneiden (I, 11. Gr.)

Dieser Punct F liegt entweder oberhalb der Seite BC oder in der Seite BC, oder unterhalb der Seite BC.

Beweis.

I. Wenn der Punct F über BC fällt, so ziehe man die geraden Linien FA, FB und FC. Hier ist nun

$$AD = DB, \text{ ferner}$$
$$DF = DF, \text{ und ferner}$$
$$\sphericalangle FDA = \sphericalangle FDB = R. \text{ Folglich auch}$$
$$\overline{AF = FB \;(I, 4. S.)}$$

Vollkommen auf eben diese Art wird bewiesen, daß AF = FC ist. Daher muß auch FB = FC seyn, und der aus F mit FA = FB = FC beschriebene Kreis geht durch die Puncte A, B und C.

II. Wenn der Punct F in BC liegt (Fig. 113.), so ziehe man die Linie FA und es kann, wie vorhin, bewiesen werden, daß FB = FA = FC ist, und folglich der aus F mit einer dieser Linien beschriebene Kreis durch die Puncte A, B und C gehen muß.

III. Wenn aber der Punct F unter BC fällt (Fig. 114.), so ziehe man wiederum die Linien FA, FB und FC.

Hier ist nun AD = DB, ferner

$$FD = FD, \text{ und endlich}$$
$$\sphericalangle FDA = \sphericalangle FDB, \text{ folglich}$$
$$\overline{FA = FB \;(I, 4. S.)}$$

Auf ähnliche Art wird bewiesen, daß FA = FC ist. Daher muß FB = FA = FC seyn und der aus F mit einer dieser Linien beschriebene Kreis durch die Puncte B, A und C gehen.

Zusatz.

Hieraus geht hervor: daß, wenn der Mittelpunct des Kreises über BC fällt, alsdann der Winkel BAC, als Winkel im größeren Abschnitte, kleiner als ein Rechter sei; ferner, daß, wenn der Mittelpunct in BC fällt, nunmehr der Winkel BAC, als Winkel im Halbkreise, ein Rechter sei; endlich daß, wenn der Mittelpunct unter BC fällt, alsdann der Winkel BAC, als Winkel im kleinern Abschnitte, größer als ein Rechter sei; auch umgekehrt: wenn der bemerkte Winkel BAC entweder ein spitzer

oder ein rechter, oder ein stumpfer ist, daß nunmehr der Mittelpunct des Kreises im ersten Falle oberhalb BC, im zweiten in BC, und im dritten Falle unterhalb BC liege.

Der 6. Satz.

Aufgabe.

In einen gegebenen Kreis ein Quadrat zu beschreiben.

Es sei (Fig. 115.) ABCD der gegebene Kreis, in welchen ein Quadrat beschrieben werden soll.

Auflösung.

Man ziehe die beiden Durchmesser BD und AC lothrecht auf einander (I, 11. S.) und dann die Verbindungslinien AB, BC, CD und DA.

Beweis.

Hier ist nun EB = ED (I, 15. Erkl.) ferner

EA = EA, und

∡ BEA = DEA = R, folglich auch

BA = AD (I, 4. S.)

Auf gleiche Art wird bewiesen, daß BA = BC und AD = DC; daher muß die vierseitige Figur ABCD gleichseitig seyn. Da aber die Linien BD und AC Durchmesser sind, so muß auch ∡ BAD = ∡ ADC = ∡ DCB = ∡ CBA = R seyn (III, 31. S.) Daher ist das Viereck ABCD auch rechtwinkelig und folglich ein Quadrat (I, 30. Erkl.)

Der 7. Satz.

Aufgabe.

Um einen gegebenen Kreis ein Quadrat zu beschreiben.

Es sei ABCD (Fig. 116.) der gegebene Kreis, um welchen das Quadrat beschrieben werden soll.

Auflösung.

Man stelle die Durchmesser BD und AC lothrecht auf einander, und ziehe durch die Puncte A, B, C und D die Tangenten FG, GH, HK und KF (III, 16. Zus.)

Beweis.

Hier sind sowohl die Winkel bei A, bei B, bei C, bei D als auch die Winkel bei E rechte Winkel (III, 18. S.) Daher sind die Linien GF, BD und HK miteinander gleichlaufend (I, 28. S.) so wie auch die Linien GH, AC und FK unter sich parallel sind. Daher muß das Viereck GFKH ein Parallelogramm seyn; auch ist GF = HK = GH = FK = BD (I, 34. S.) und ∠ G = ∠ F = ∠ K = ∠ H = R. Folglich ist dieses Viereck gleichseitig und rechtwinkelig und daher ein Quadrat.

Der 8. Satz.

Aufgabe.

In ein gegebenes Quadrat einen Kreis zu beschreiben.

Es sei (Fig. 117.) ADCB das gegebene Quadrat, in welches der Kreis beschrieben werden soll.

Auflösung.

Man halbire die Seite AD in E und die Seite AB in F, ziehe durch E die EH gleichlaufend (I, 31. S.) mit AB und DC und durch F die FK parallel mit AD und BC.

Beweis.

Durch diese Linien entstehen vier Parallelogramme AEGF, EDKG, FGHB und GKCH. Nun ist

AD = AB, ferner
AE = $\frac{1}{2}$ AD, und
AF = $\frac{1}{2}$ AB, folglich auch

AE = AF, so wie auch
FG = GE (I, 34. S.)

Ganz auf ähnliche Art wird bewiesen, daß FG = GH, und GE = GK ist. Daher ist nun GE = GK = GH = GF und der aus G mit einer dieser Linien beschriebene Kreis muß durch die Puncte E, K, H und F gehen. Da aber auch die Winkel bei E, bei K, bei H und bei F rechte sind, so muß der Kreis FEKH die Seiten des Quadrats ADCB berühren (III, 16. S.)

Der 9. Satz.

Aufgabe.

Um ein gegebenes Quadrat einen Kreis zu beschreiben.

Es sei (Fig. 118.) ABCD das gegebene Quadrat, um welches ein Kreis beschrieben werden soll.

Auflösung.

Wenn man die zwei Diagonalen AC und BD zieht, welche einander in E durchschneiden, so kann aus E mit EA der verlangte Kreis beschrieben werden.

Beweis.

Da hier AB = AD, ferner
CB = CD und
AC = AC, so ist auch (I, 8. S.)
$\angle$ BAC = $\angle$ DAC. Da aber
$\angle$ BAD = R, so ist auch
$\angle$ BAC = $\angle$ DAC = $1/_2$R.

Auf eben diese Art wird bewiesen, daß
$\angle$ ABD = $\angle$ CBD = $1/_2$R, daher ist auch
$\angle$ EAB = $\angle$ EBA und folglich
EA = EB (I, 6. S.)

Auf gleiche Art wird bewiesen, daß auch EA = ED und EB = EC. Daher ist EA = EB = EC = ED und der aus E mit einer dieser Linien beschriebene Kreis muß durch die Puncte B, A, D und C gehen.

Der 10. Satz.

Aufgabe.

Ein gleichschenkeliges Dreieck zu bilden, worin jeder der zwei Winkel an der Grundlinie noch einmal so groß ist, als der dritte Winkel.

Man soll (Fig. 119.) ein gleichschenkeliges Dreieck FGH bilden, in welchem $\angle$ G = $\angle$ H = 2 $\angle$ F ist.

Auflösung.

Man ziehe eine gerade Linie AB und schneide sie so in C, daß das Rechteck aus AB und BC = Quadr. AC ist (II, 11. S.) Nun beschreibe man aus A mit AB den Kreis BDE und trage in denselben die Linie BD = AC ein (IV, 1. S.) Dann ziehe man die Linien DA und DC und beschreibe um das Dreieck ADC den Kreis ACD (IV, 5. S.), so ist, weil AB = AD (I, 15. Erkl.) das Dreieck BAD gleichschenkelig und folglich ∠ ADB = ∠ ABD (I, 5. S.)

Beweis.

Da nun Recht. AB und BC = Quadr. CA und auch
CA = BD, so ist
Recht. AB und BC = Quadr. BD und es muß die Linie BD eine Tangente des Kreises ACD seyn (III, 37. S.) Daher ist nun ∠ BDC = ∠ CAD (III, 32. S.) Allein
∠ CDA = ∠ CDA, folglich
∠ ADB = ∠ CAD + ∠ CDA. Es ist aber
(I, 32. S.) ∠ BCD = ∠ CAD + ∠ CDA, folglich auch
∠ ADB = ∠ BCD (I, 1. Gr.) Es war aber
∠ ADB = ∠ CBD, folglich ist
∠ BCD = ∠ CBD (I, 1. Gr.) Daher auch
BD = DC (I, 6. S.) Es war aber
BD = BA, folglich ist auch
DC = CA, und daher auch
∠ CAD = ∠ CDA (I, 5. S.) also
∠ BCD = 2 ∠ CAD (I, 32. S.)
Nun war aber ∠ ADB = ∠ ABD = ∠ BCD, folglich ist
∠ ADB = ∠ ABD = 2 ∠ CAD.

Der 11. Satz.

Aufgabe.

In einen gegebenen Kreis ein gleichseitiges und gleichwinkeliges Fünfeck zu beschreiben.

Es sei (Fig. 120.) ABCDE der gegebene Kreis, in welchen das gleichseitige und gleichwinkelige Fünfeck zu beschreiben ist.

Auflösung.

Man bilde ein gleichschenkeliges Dreieck FGH, worin jeder der beiden Winkel bei G und H noch einmal so groß als der Winkel bei F ist (IV, 10. S.) und beschreibe in den gegebenen Kreis ein Dreieck ADC so, daß ∢ CAD = ∢ F, ∢ ACD = ∢ G, und ∢ ADC = ∢ H ist (IV, 2. S.), so ist jeder der zwei Winkel ACD und ADC = 2 Winkel CAD. Nun halbire man ∢ ACD durch die Linie CE (I, 9. S.) und ∢ ADC durch die Linie DB, und ziehe die geraden Linien AB, BC, DE und EH.

Beweis.

Da hier ∢ CAD = ∢ ACE = ∢ ECD = ∢ CDB = ∢ BDA, so müssen auch die Bogen, worauf sie stehen, nämlich Bog. AB, Bog. BC, Bog. CD, Bog. DE und Bog. EA einander gleich seyn, so wie auch die geraden Linien AB, BC, CD, DE und EA einander gleich sind (III, 26. und 29. S.) folglich ist das Fünfeck ABCDE ein gleichseitiges.

Da nun Bog. AB = Bog. DE und
Bog. BCD = Bog. BCD, so ist auch
Bog. ABCD = Bog. BCDE, und daher auch ∢ DEA = ∢ EAB (III, 27. S.)

Ganz auf ähnliche Art wird bewiesen, daß jeder der übrigen Winkel einem der Winkel DEA oder EAB gleich ist. Daher ist ∢ ABC = ∢ BCD = ∢ CDE = ∢ DEA = ∢ EAB und das Fünfeck ABCDE ist auch gleichwinkelig.

Der 12. Satz.

Aufgabe.

Um einen gegebenen Kreis ein gleichseitiges und gleichwinkeliges Fünfeck zu beschreiben.

Es sei (Fig. 121.) ABCDE der gegebene Kreis, um welchen ein gleichseitiges und gleichwinkeliges Fünfeck beschrieben werden soll.

Auflösung.

Man denke sich in diesen Kreis ein gleichseitiges und gleichwinkeliges Fünfeck so beschrieben, daß dessen Winkelpuncte sich

bei A, B, C, D und E befinden (IV, 11. S.) Zieht man nun durch diese Puncte die Tangenten GH, HK, KL, LM und MG, so ist HGMLK das zu beschreibende Fünfeck.

B e w e i s.

Nimmt man des Kreises Mittelpunct F und zieht die geraden FA, FB, FC, FD und FE, so wie auch FK und FL, so ist, da sich bei B, C und D rechte Winkel befinden (III, 18. S.) nunmehr Quadr. $FK =$ Quadr. $FB +$ Quadr. BK und

Quadr. $FK =$ Quadr. $FC +$ Quadr. KC.

Es ist aber $FB = FC$ (I, 15. Erkl.) und daher

Quadr. $FB =$ Quadr. FC, daher auch

Quadr. $BK =$ Quadr. KC (I, 3. Gr.) Folglich

$BK = KC$. Allein es ist auch

$FB = FC$ und

$FK = FK$, daher denn

$\measuredangle BFK = \measuredangle CFK$; oder

$\measuredangle CFK = \frac{1}{2} \measuredangle BFC$.

Auf gleiche Art wird bewiesen, daß $CL = LD$, $\measuredangle CFL = \measuredangle DFL$, und folglich

$\measuredangle CFL = \frac{1}{2} \measuredangle CFD$ ist.

Weil aber Bog. $BC =$ Bog. CD (IV, 11. S.) so ist

$\measuredangle BFC = \measuredangle CFD$ (III, 27. S.) daher auch

$\measuredangle CFK = \measuredangle CFL$ (I, 7. Gr.) Ferner ist

$FC = FC$, so wie auch

$\measuredangle FCK = \measuredangle FCL = R$, daher denn

$KC = CL$ (I, 26. S.) oder auch

$KC = \frac{1}{2} KL$.

Auf ähnliche Art wird bewiesen, daß $KB = \frac{1}{2} KH$ und $LD = \frac{1}{2} LM$ ist. Da aber $KC = KB$ und $CL = LD$, so ist auch $KL = KH$ (I, 6. Gr.) und $KL = LM$. Auf ähnliche Art wird gezeigt, daß $KH = HG$ und $LM = MG$ sei, daher ist $KH = HG = GM = ML = LK$, und das Fünfeck HGMLK ist gleichseitig.

Da nun $\measuredangle FBK = \measuredangle FKC = R$, und auch

$\measuredangle BFK = \measuredangle CFK$, so muß auch

$\measuredangle BKF = \measuredangle CKF$ (I, 32. S.) und folglich

$\measuredangle CKF = \frac{1}{2} \measuredangle BKC$ seyn.

Ebenso wird bewiesen, daß ∠ CLF = ½ CLD. Da nun
∠ FCK = ∠ FCL = R, auch ferner
∠ CFK = ∠ CFL, so ist auch
∠ CKF = ∠ CLF (I, 32. S.) folglich
∠ BKC = ∠ CLD (I, 6. Gr.)

Auf ähnliche Art wird bewiesen, daß die übrigen Winkel bei M, G und H jedem der beiden Winkel BKC und CLD gleich sind, folglich ist ∠ HGM = ∠ GML = ∠ MLK = ∠ LKH = ∠ KHG, und das Fünfeck HGMLK ist auch gleichwinkelig.

Der 13. Satz.

Aufgabe.

In ein gegebenes gleichseitiges und gleichwinkeliges Fünfeck einen Kreis zu beschreiben.

Es sei (Fig. 122.) BAEDC ein gleichseitiges und gleichwinkeliges Fünfeck, so soll in dasselbe ein Kreis beschrieben werden.

Auflösung.

Man halbire den Winkel BCD durch CF und den Winkel CDE durch DF (I, 9. S.) und ziehe aus ihrem Durchschnittspuncte F die geraden FE, FA und FB. Zieht man nun aus F auf BA das Loth FG, so ist FG der Halbmesser des zu beschreibenden Kreises.

Beweis.

Da hier BC = CD, ferner
CF = CF, und auch
∠ BCF = ∠ DCF, so ist
∠ CBF = ∠ CDF (I, 4. S.) Es ist aber
∠ CDF = ½ ∠ CDE = ½ ∠ CBA, daher auch
∠ CBF = ½ ∠ CBA und es wird folglich der ∠ CBA durch die Linie BF halbirt.

Auf gleiche Art wird gezeigt, daß ∠ BAE durch AF, und ∠ AED durch EF halbirt wird.

Fällt man nun aus F auf die Seite des Fünfecks die Lothe FH, FK, FL und FM, so ist

$\sphericalangle$ FHC = $\sphericalangle$ FKC = R. Es war aber
$\sphericalangle$ HCF = $\sphericalangle$ KCF, und es ist
CF = CF, daher muß
FH = FK seyn (I, 26. S.)

Auf dieselbe Art wird bewiesen, daß jedes der übrigen Lothe FL, FM und FG jedem der Lothe FH und FK gleich ist. Folglich ist FG = FM = FL = FK = FH, und der aus F mit FG beschriebene Kreis muß durch die Puncte G, M, L, K und H gehen; und, weil bei diesen Puncten rechte Winkel sind, die Seiten des Fünfecks in diesen Puncten berühren.

Der 14. Satz.

Aufgabe.

Um ein gegebenes gleichseitiges und gleichwinkeliges Fünfeck einen Kreis zu beschreiben.

Es sei (Fig. 123.) BAEDC das gleichseitige und gleichwinkelge Fünfeck, um welches ein Kreis beschrieben werden soll.

Auflösung.

Man halbire den $\sphericalangle$ BCD durch CF und den $\sphericalangle$ CDE durch DF, welche im Puncte F zusammentreffen, und es ist FC die Linie, mit welcher aus dem Puncte F der verlangte Kreis beschrieben werden kann.

Beweis.

Wenn man die Linien FB, FA und FE zieht, so wird hier, wie zuvor (IV, 13. S.) bewiesen, daß durch diese Linien auch die übrigen Winkel des Fünfecks halbirt werden, wodurch denn die entstehenden Hälften alle einander gleich sind. Es muß demnach △ CFB = △ BFA = △ AFE = △ EFD = △ DFC seyn (I, 6. S.) Daher ist auch FC = FB = FA = FE = FD und der aus F mit FC beschriebene Kreis muß durch die Vieleckspuncte C, B, A, E und D gehen.

Der 15. Satz.

Aufgabe.

In einen gegebenen Kreis ein gleichseitiges und gleichwinkeliges Sechseck zu beschreiben.

Es sei (Fig. 124.) ACEF der gegebene Kreis, in welchen ein gleichseitiges und gleichwinkeliges Sechseck beschrieben werden soll.

Auflösung.

Wenn G der Mittelpunct des Kreises ist, so ziehe man einen Durchmesser AGD, beschreibe aus D mit DG den Kreis EGCH, ziehe EG und verlängere sie nach B, so wie auch CG, welche nach F verlängert wird. Endlich ziehe man die geraden AB, BC, AF und FE.

Beweis.

Da hier DE = DG (I, 15. Erkl.) und ebenso DG = GE, so ist das Dreieck GED gleichseitig und daher auch gleichwinkelig (I, 5. S.) und jeder seiner drei Winkel so groß, als der dritte Theil von zwei Rechten (I, 32. S.) Eben dieses gilt auch vom gleichseitigen Dreiecke GCD.

Da nun $\sphericalangle$ EGD = $\sphericalangle$ CGD = $\frac{2R}{3}$, so ist auch

$\sphericalangle$ CGB = $\frac{2R}{3}$ (I, 13. S.) daher ist $\sphericalangle$ EGD = $\sphericalangle$ CGD = $\sphericalangle$ CGB.

Da aber jeder dieser Winkel auch seinem Scheitelwinkel gleich ist, so ist auch $\sphericalangle$ EGD = $\sphericalangle$ DGC = $\sphericalangle$ CGB = $\sphericalangle$ BGA = $\sphericalangle$ AGF = $\sphericalangle$ FGE (I, 15. S.) Da aber auch GE = GF = GA = GB = GC = GD (I, 15. Erkl.) so ist auch $\triangle$ DGE = $\triangle$ EGF = $\triangle$ FGA = $\triangle$ AGB = $\triangle$ BGC = $\triangle$ CGD (I, 4. S.) daher muß $\sphericalangle$ DEF = $\sphericalangle$ EFA = $\sphericalangle$ FAB = $\sphericalangle$ ABC = $\sphericalangle$ BCD = $\sphericalangle$ CDE und folglich das Sechseck ABCDEF ein gleichseitiges und gleichwinkeliges seyn.

Zusatz.

Hieraus ist klar, daß die Seite des gleichwinkeligen und gleichseitigen Sechsecks dem Halbmesser des Kreises gleich sei,

in welchem es beschrieben ist. Auch geht hieraus hervor, daß man durch Tangenten, welche durch die Puncte A, B, C, D, E und F gelegt werden, auf ähnliche Art ein gleichseitiges und gleichwinkeliges Sechseck um den Kreis beschreiben könne, wie dieses früher für das gleichseitige und gleichwinkelige Fünfeck (IV, 12. S.) geschehen ist. Auch kann ebenso, wie bei dem gleichseitigen und gleichwinkeligen Fünfecke gezeigt worden ist, sowohl in als um einen gegebenen Kreis ein gleichseitiges und gleichwinkeliges Sechseck beschrieben werden.

Der 16. Satz.

Aufgabe.

In einen gegebenen Kreis ein gleichseitiges und gleichwinkeliges Fünfzehneck zu beschreiben.

Es sei (Fig. 126.) ABCD der gegebene Kreis, in welchen ein gleichseitiges und gleichwinkeliges Fünfzehneck beschrieben werden soll.

Auflösung und Beweis.

Es sei AC die Seite des in den gegebenen Kreis beschriebenen gleichseitigen Dreiecks, und AB die Seite des in denselbigen Kreis beschriebenen gleichseitigen und gleichwinkeligen Fünfecks (IV, 11. S.) Denkt man sich nun dieses Kreises Umfang in fünfzehn gleiche Theile getheilt, so enthält der Bogen ABC, als der dritte Theil dieses Umfangs, fünf solcher Theile; der Bogen AB aber, als der fünfte Theil dieses Umfanges, drei solcher Theile. Daher muß der Bogen BC, als der Unterschied der zwei ebenbemerkten Bogen, zwei solcher Theile enthalten. Wird daher dieser Bogen BC in E halbirt (III, 30. S.), so ist Bogen BE sowohl als Bogen EC einer dieser Theile. Wird nun die gerade Linie EC gezogen, so kann man noch vierzehn ihr gleiche gerade Linien in dem Umfange des Kreises umhertragen (IV, 1. S.) und das hiedurch in dem Kreise entstehende Fünfzehneck muß gleichseitig seyn. Da aber auch jeder seiner Winkel auf demselbigen Bogen steht, so ist dieses Fünfzehneck auch gleichwinkelig (III, 27. S.)

Zusatz.

Auf gleiche Art, wie bei dem gleichseitigen und gleichwinkeligen Fünfecke, wird auch ein gleichseitiges und gleichwinkeliges Fünfzehneck um einen gegebenen Kreis oder ein Kreis in oder um ein gegebenes gleichseitiges und gleichwinkeliges Fünfzehneck beschrieben.

Ende des vierten Buchs.

Das sechste Buch der Elemente des Euclides.

Dieses Buch handelt:

1. Von jenen Proportionallinien, welche bei dem Dreiecke und Parallelogramme entstehen, wenn diese Figuren auf bestimmte Art geschnitten oder verbunden werden. Satz 1—17.

2. Von der Aehnlichkeit dreieckiger und mehrseitiger Figuren, nebst Anwendungen davon. Satz 18—33.

(Man sehe, was in den Anmerkungen zu diesem Buche als Vorerinnerung [CLX.] bemerkt worden ist.)

Erklärungen des sechsten Buches.

---

1. Geradlinige Figuren sind einander ähnlich, wenn alle Winkel, einzeln genommen, einander gleich und die Seiten, welche diese Winkel bilden, einander proportional sind.

2. In geradlinigen Figuren stehen die Seiten im umgekehrten Verhältnisse, wenn sich eine Seite der ersten Figur so zu einer Seite der zweiten verhält, wie eine andere Seite der zweiten Figur zu einer andern Seite der ersten.

3. Eine gerade Linie heißt nach stetiger Proportion getheilt, wenn sich die ganze Linie zu ihrem größern Abschnitte verhält, wie sich dieser größere Abschnitt zum kleinern Abschnitte verhält.

4. Die Höhe einer Figur ist ein Loth, welches von ihrer Spitze auf ihre Grundlinie gezogen wird.

5. Wenn zwei oder mehrere Verhältnisse die Eigenschaft haben, daß immer das zweite Glied eines vorhergehenden zugleich auch das erste Glied des nächstfolgenden ist, so sagt man, das Verhältniß des ersten Gliedes im ersten zum letzten Gliede des letzten Verhältnisses, sei aus allen diesen Verhältnissen, oder aus solchen, die ihnen gleich sind, zusammengesetzt.

Der 1. Satz.

Lehrsatz.

Wenn zwei Dreiecke oder zwei Parallelogramme einerlei Höhe haben, so verhalten sie sich, wie ihre Grundlinien.

Wenn die Dreiecke (Fig. 127.) ABC und ACD oder die Parallelogramme EACB und AFDC einerlei Höhe AC haben,

so verhalten sie sich wie ihre Grundlinien BC und CD, das heißt, es ist △ ABC : △ ACD = BC : CD und

EACB : AFDC = BC : CD.

B e w e i s.

Man verlängere die Linie BD über B und D nach H und L, nehme BG = GH (und so viele Linien man will) = CB. Desgleichen nehme man DK = KL (und so viele Linien man will) = CD und ziehe die Verbindungslinien AG, AH, AK und AL.

I. Da hier CB = BG = GH, so ist auch

△ ACB = △ ABG = △ AGH (I, 38. S.)

Da ferner CD = DK = KL, so ist auch

△ ACD = △ ADK = △ AKL.

Daher ist HC und △ AHC von BC und △ ABC, und aus eben diesem Grunde auch LC und △ ALC von CD und △ ADC ein Gleichvielfaches. Nun ist aber,

wenn HC = LC, auch △ AHC = △ ALC, wenn aber
HC < LC, auch △ AHC < ALC, und wenn
HC > LC, auch △ AHC > △ ALC (I, 38. S.)

folglich ist △ ABC : △ ACD = BC : CD.

II. Nun ist aber auch

EACB = 2 △ ABC und
AFDC = 2 △ ACD (I, 41. S.) folglich
EACB : AFDC = 2 △ ABC : 2 △ ACD, oder:
EACB : AFDC = △ ABC : △ ACD.

Es ist aber △ ABC : △ ACD = BC : CD (I.) folglich auch

EACB : AFDC = BC : CD.

D e r 2. S a t z.

L e h r s a t z.

Wenn mit einer Dreiecksseite eine gerade Linie durch das Dreieck parallel geht, so schneidet sie die übrigen Seiten des Dreiecks proportional, und wenn zwei Seiten eines Dreiecks von einer geraden Linie im Dreiecke proportional geschnit-

ten werden, so ist diese gerade Linie mit der dritten Seite des Dreiecks gleichlaufend.

Es sei (Fig. 128.) in dem Dreiecke ACB die ED mit CB gleichlaufend, so ist CE : EA = BD : DA, und wenn BD : DA = CE : EA ist, so muß die Verbindungslinie ED mit CB gleichlaufend seyn.

Beweis.

I. Man ziehe die Verbindungslinien EB und DC, so ist, weil DE für die Dreiecke DEC und EDB gemeinschaftliche Grundlinie, auch CB mit ED parallel ist,

△ BDE = △ CED (I, 37. S.) Da nun

△ ADE = △ ADE, so ist auch

△ BDE : △ ADE = △ CDE : △ ADE.

Es ist aber △ BDE : △ ADE = BD : DA (VI, 1. S.)

Daher △ CDE : △ ADE = BD : DA. Allein

△ CDE : △ ADE = CE : EA (VI, 1. S.)

Daher BD : DA = CE : EA.

II. Wenn aber BD : DA = CE : EA ist, so ist auch

BD : DA = △ BDE : △ ADE,

folglich CE : EA = △ BDE : △ ADE.

Allein CE : EA = △ CDE : △ ADE,

folglich △ BDE : △ ADE = △ CDE : △ ADE.

Es ist aber △ ADE = △ ADE, folglich auch

△ BDE = △ CDE, allein die beiden gleichen Dreiecke BDE und CDE haben die Grundlinie ED gemein, folglich muß auch CB mit ED parallel seyn (I, 39. S.)

Der 3. Satz.

Lehrsatz.

Wenn der Winkel eines Dreiecks halbirt wird und die Theilungslinie auch die Grundlinie schneidet, so sind die zwei Abschnitte der Grundlinie den übrigen Seiten des Dreiecks proportional; und wenn die Abschnitte der Grundlinie eines Dreiecks seinen übrigen Seiten proportional sind, so hal-

birt die gerade Linie von der Spitze nach dem Theilpuncte der Grundlinie den Winkel an der Spitze.

Es sei (Fig. 129.) ABC das gegebene Dreieck und der ∡ BAC werde durch AD halbirt, so ist BD : DC = BA : AC und wenn diese Proportion statt findet, so ist ∡ BAC durch AD halbirt.

Beweis.

I. Man ziehe durch C die Linie CE mit DA gleichlaufend (I, 31. S.) und verlängere BA über A, bis sie diese Parallele in E schneidet, so ist

∡ ACE = ∡ CAD (I, 29. S.) und
∡ CEA = ∡ DAB. Nun ist aber
∡ CAD = ∡ DAB nach der Annahme; also
∡ ACE = ∡ CEA und daher
AE = AC (I, 6. S.)

Weil aber im Dreiecke EBC die AD mit EC gleichlaufend ist, so hat man

BD : DC = BA : AE (VI, 2. S.) Allein
AE = AC. Daher auch
BD : DC = BA : AC.

II. Wäre nun BD : DC = BA : AC, so ist, weil in dem Dreiecke EBC die AD mit EC parallel läuft, auch

BD : DC = BA : AE (VI, 2. S.) daher wird
BA : AE = BA : AC. Somit auch
AE = AC, und folglich
∡ AEC = ∡ ACE (I, 5. S.) Es ist aber
∡ AEC = ∡ BAD (I, 29. S.) und
∡ ACE = ∡ DAC, daher auch
∡ BAD = ∡ DAC.

Der 4. Satz.

Lehrsatz.

Wenn in zwei Dreiecken die Winkel, einzeln genommen, einander gleich sind, so sind die Seiten welche gleiche Winkel einschließen, einander pro-

portional, und die, welche gleichen Winkeln gegenüberliegen, homolog.

Es seien (Fig. 130.) in den Dreiecken ABC und DCE die Winkel, einzeln genommen, einander gleich, so ist

$$BA : AC = CD : DE$$

$$AB : BC = DC : CE \text{ und}$$

$$AC : CB = DE : EC.$$

Beweis.

Wenn man die Seite BC des Dreiecks ABC mit der Seite CE des Dreiecks DCE in eine gerade Linie BCE bringt, so ist, da

$\sphericalangle ABC + \sphericalangle ACB < 2R$ (I, 17. S.) und

$\sphericalangle ACB = \sphericalangle DEC$, nunmehr auch

$\sphericalangle ABC + \sphericalangle DEC < 2R$.

Daher müssen die Linien BA und ED, wenn jene über A und diese über D verlängert wird, einander in F durchschneiden (I, 11. Gr.)

Da nun $\sphericalangle DCE = \sphericalangle ABC$ und

$\sphericalangle ACB = \sphericalangle DCE$, so ist die Seite BF mit CD und die Seite AC mit FE parallel (I, 28. S.), folglich ist AFDC ein Parallelogramme und daher

$FA = CD$ und $AC = DF$ (I, 34. S.)

Weil aber AC mit FE und BF mit CD gleichlaufend ist, so hat man $BA : AF = BC : CE$ und

$BC : CE = FD : DE$ (VI, 2. S.) folglich ist auch

$BA : CD = BC : CE$ und $BC : CE = AC : DE$,

folglich $BA : BC = CD : CE$ und

$BC : AC = CE : DE$, daher auch

$BA : AC = CD : DE$.

Der 5. Satz.

Lehrsatz.

Wenn zwei Dreiecke proportionale Seiten haben, so haben sie, einzeln genommen, gleiche Winkel, und die Winkel, welche homologen Seiten gegenüberliegen, sind einander gleich.

Es sei in den Dreiecken (Fig. 131.) ABC und DEF

AB : BC = DE : EF, ferner

BC : CA = EF : FD, und endlich

BA : AC = ED : DF, so ist

∠ ABC = ∠ DEF; ∠ BCA = ∠ EFD, und

∠ BAC = ∠ EDF.

Beweis.

Man lege an die Seite FE den Winkel FEG = ∠ ABC (I. 23. S.) und an EF den Winkel EFG = ∠ BCA, so ist auch ∠ EGF = ∠ BAC (I, 32. S.) Daher sind die Dreiecke ABC und GEF gleichwinkelig und es ist

AB : BC = GE : EF (VI, 4. S.) Allein es ist

AB : BC = DE : EF nach der Annahme, folglich ist

DE : EF = GE : EF oder auch

DE : GE = EF : EF und daher

DE = GE.

Auf gleiche Art wird bewiesen, daß DF = GF ist. Da nun die Dreiecke DEF und GEF auch noch die Seite EF gemein haben, so ist

∠ DEF = ∠ GEF = ∠ ABC (I, 8. S.) ferner

∠ DFE = ∠ GFE = ∠ ACB und auch

∠ EDF = ∠ EGF = ∠ BAC.

Der 6. Satz.

Lehrsatz.

Wenn in zwei Dreiecken ein Winkel des einen einem Winkel des andern gleich ist und die Seiten, welche diese Winkel bilden, einander proportional sind, so sind auch jene Winkel in beiden Dreiecken einander gleich, welche den homologen Seiten gegenüber liegen.

Es sei in den Dreiecken (Fig. 132.) ABC und DEF der ∠ BAC = ∠ EDF und ferner BA : AC = ED : DF, so ist auch ∠ ABC = ∠ DEF und ∠ ACB = ∠ DFE.

Beweis.

Man lege an FD den Winkel FDG = ∠ BAC = ∠ EDF (I, 23. S.) und an DF den ∠ DFG = ∠ ACB, so muß auch ∠ DGF = ∠ ABC seyn (I, 32. S.) Daher sind die Dreiecke ABC und DGF gleichwinkelige und es ist

BA : AC = GD : DF (VI, 4. S.) Es ist aber
BA : AC = ED : DF nach der Annahme, daher auch
ED : DF = GD : DF und
ED : GD = DF : DF, folglich ist
ED = GD. Es ist aber ferner
DF = DF und ∠ EDF = ∠ GDF, daher
∠ DFE = ∠ DFG = ∠ ACB (I, 4. S.) und
∠ DEF = ∠ DGF = ∠ ABC.

Der 7. Satz.

Lehrsatz.

Wenn in zwei Dreiecken ein Winkel des einen einem Winkel des andern gleich ist, und die Seiten, von welchen andere Winkel eingeschlossen werden, einander proportional sind, auch von den noch übrigen Winkeln jeder zugleich entweder kleiner oder nicht kleiner, als ein Rechter ist, so sind die Dreiecke gleichwinkelig, und die Winkel, welche von proportionirten Seiten eingeschlossen werden, einander gleich.

Es sei in den Dreiecken (Fig. 133.) ABC und DEF der ∠ BAC = ∠ EDF, ferner AB : BC = DE : EF, auch jeder von den noch übrigen Winkeln ACB und DFE zugleich entweder kleiner, oder nicht kleiner, als ein Rechter, so sind die Dreiecke gleichwinkelig, und es ist ∠ ABC = ∠ DEF.

Beweis.

I. Es sei jeder der beiden Winkel ACB und DFE kleiner als ein Rechter.

Wären diese Winkel ABC und DEF einander nicht gleich, so müßte einer von ihnen, etwa ∡ ABC, der größere seyn. Es sei daher

∡ ABG = ∡ DEF (I, 23. S.) so ist, weil
∡ BAC = ∡ EDF nunmehr auch
∡ AGB = ∡ DFE (I, 32. S.) Daher sind die

Dreiecke ABG und DEF gleichwinkelig, und es ist

AB : BG = DE : EF (VI, 4. S.) Es war aber
AB : BC = DE : EF nach der Annahme; folglich ist
AB : BC = AB : BG, oder
AB : AB = BC : BG und daher
BC = BG und ∡ BCG = ∡ BGC (I, 5. S.)

Es ist aber ∡ BGG < R nach der Annahme; daher auch

∡ BGC < R und demnach
∡ AGB > R (I, 13. S.) Es ist aber
∡ AGB = ∡ DFE, folglich wäre
∡ DFE > R, welches der Annahme, daß Winkel DFE < R widerspricht. Daher ist
∡ ABC = ∡ DEF; es war aber
∡ BAC = ∡ EDF, folglich ist auch
∡ ACB = ∡ DFE und die Dreiecke ABC und DEF sind gleichwinkelig.

II. Es sei nunmehr jeder der zwei Winkel ACB und DFE nicht kleiner, als ein Rechter, so kann auf ähnliche Art bewiesen werden, daß, wenn diese Winkel ABC und DEF einander nicht gleich wären, sondern, wenn Winkel ABC größer, als Winkel DEF wäre, nun wieder ∡ BCG = ∡ BGC seyn müßte. Da aber ∡ BGC nicht kleiner als ein Rechter ist, so wäre auch ∡ BCG nicht kleiner, als ein Rechter und es müßten in dem Dreiecke BGC die ebengenannten Winkel nicht kleiner, als zwei Rechte seyn, welches widersprechend ist (I, 17. S.) Daher ist ∡ ABC = ∡ DEF, es war aber

∡ BAC = ∡ EDF, folglich ist auch
∡ ACB = ∡ DFE (I, 32. S.) und die Dreiecke ABC und DEF sind wiederum gleichwinkelig.

Der 8. Satz.

Lehrsatz.

Wenn man in einem rechtwinkeligen Dreiecke vom Scheitel des rechten Winkels ein Loth auf die gegenüberliegende Seite zieht, so sind die zwei, an beiden Seiten dieses Lothes liegenden Dreiecke, sowohl unter sich, als auch dem ganzen Dreiecke ähnlich.

Wenn in dem rechtwinkeligen Dreiecke (Fig. 134.) BAC aus A auf BC das Loth AD gezogen wird, so ist das Dreieck ABD dem Dreiecke ACD und dem Dreiecke ABC ähnlich.

Beweis.

I. Da hier ∡ BAC = ∡ ADB = R und

∡ ABC sowohl dem Dreiecke ABC als auch dem Dreiecke ABD angehört, so ist auch ∡ ACB = ∡ BAD (I, 32. S.) Daher sind die beiden Dreiecke ABC und ABD gleichwinkelig, folglich ihre Seiten proportional (VI, 4. S.) und die Dreiecke selbst einander ähnlich (VI, 1. Erkl.) Ganz auf ähnliche Art wird bewiesen, daß auch die Dreiecke ABC, und ADC einander ähnlich sind. Daher sind auch die Dreiecke ABD und ADC dem Dreiecke ABC ähnlich.

II. Da ∡ ADB = ∡ ADC = R und

∡ BAD = ∡ ACB nach dem Obigen, so ist auch

∡ ADB = ∡ DAC (I, 32. S.) Daher sind die Dreiecke ADB und ADC gleichwinkelige, folglich auch ihre Seiten proportional (VI, 4. S.) und beide Dreiecke selbst einander ähnlich (VI, 1. Erkl.)

Zusatz.

Hieraus folgt, daß in dem rechtwinkeligen Dreiecke das von dem rechten Winkel nach der Grundlinie gefällte Loth zwischen den Abschnitten dieser Grundlinie, und die an jedem Abschnitte liegende Seite zwischen der Grundlinie und diesem Abschnitte die mittlere Proportionallinie ist. Man hat nämlich

BD : AD = AD : DC, ferner

BC : BA = BA : BD und endlich

BC : CA = CA : CD.

Der 9. Satz.

Aufgabe.

Von einer gegebenen geraden Linie einen bestimmten Theil abzuschneiden.

Es sei (Fig. 135.) die gerade Linie AB gegeben, von welcher ein bestimmter Theil abgeschnitten werden soll.

Auflösung.

Es werde von der Linie AB der dritte Theil verlangt, so ziehe man an BA die gerade AC unter willkührlichem Winkel BAC, nehme auf AC einen beliebigen Punct D, und mache DE = EC = AD. Wird nun die Verbindungslinie CB und durch D mit CB die gleichlaufende DF gezogen (I, 31. S.) so ist AF der dritte Theil von AB.

Beweis.

Da in dem Dreiecke ABC die Linie FD mit BC gleichlaufend ist, so hat man

CD : DA = BF : FA, (VI, 2. S.) Es ist aber
CD = 2 DA, folglich auch
BF = 2 FA und daher
BA = 3 FA, oder AF = $\frac{1}{3}$ AB.

Der 10. Satz.

Aufgabe.

Eine gegebene gerade Linie so zu theilen, daß ihre Abschnitte den Abschnitten einer gegebenen getheilten Linie proportional sind.

Es sei (Fig. 136.) die Linie AB in drei Theile zu theilen, welche den Theilen AD, DE und EC der getheilten Linie AC proportional sind.

Auflösung.

Man lege die in D und E getheilte Linie AC unter einem willkührlichen Winkel an die zu theilende Linie BA, ziehe die Verbindungslinie CB, und durch E die EG, durch D die DF mit CB

gleichlaufend, so wie auch die DK parallel mit AB, so sind AF FG und GB die zu findenden Abschnitte der Linie AB.

Beweis.

Da hier sowohl FDHG als GHKB Parallelogramme sind, so ist DH = FG und HK = GB (I, 34. S.) Weil aber in dem Dreiecke DKC die KC mit HE gleichlaufend ist, so hat man

CE : ED = KH : HD (VI, 2. S.). Daher auch

CE : ED = BG : GF. Da nun in dem Dreiecke AGE die GE mit FD parallel ist, so hat man

ED : DA = GF : FA. (VI, 2. S.) folglich ist

AD : DE : EC = AF : FG : GB.

Der 11. Satz.

Aufgabe.

Zu zwei gegebenen geraden Linien die dritte Proportionallinie zu finden.

Es sei (Fig. 137.) AB und AC die zwei gegebenen Linien, zu welchen man die dritte Proportionale finden soll.

Auflösung.

Man setze die gegebenen Linien AB und AC unter einem willkührlichen Winkel A zusammen, verlängere AB über B bis BD = AC, ziehe BC und verlängere AC über C bis die durch D mit BC parallele DE sie in E schneidet. (I, 31. S.)

Beweis.

Da in dem Dreiecke AED die CB parallel mit ED ist, so hat man

AB : BD = AC : CE (VI, 2. S.) Es ist aber

BD = AC, folglich auch

AB : AC = AC : CE, und CE die zu findende dritte Proportionallinie.

Der 12. Satz.

Aufgabe.

Zu drei gegebenen geraden Linien die vierte Proportionallinie zu finden.

Es seien (Fig. 138.) A, B und C die drei gegebenen geraden Linien, zu welchen die vierte Proportionallinie zu finden ist.

Auflösung.

Man setze zwei willkührliche Linien ED und DF unter einem beliebigen Winkel EDF zusammen, mache DG = A, GE = B, DH = C, ziehe die Verbindungslinie GH und durch E eine der GH parallele Linie GF (I, 31. S.)

Beweis.

Da hier in dem Dreiecke DEF die GH mit EF parallel ist, so hat man

DG : GE = DH : HF (VI, 2. S.) Es war aber DG = A, GE = B, und DH = C, folglich ist

A : B = C : HF, und HF die zu findende Proportionale.

Der 13. Satz.

Aufgabe.

Zu zwei gegebenen geraden Linien die mittlere Proportionallinie zu finden.

Es seien (Fig. 139.) AB und BC die gegebenen zwei Linien, zu welchen eine mittlere Proportionale zu finden ist.

Auflösung.

Man lege die gegebenen Linien AB und BC in eine gerade Linie ABC, beschreibe über AC den Halbkreis ADC, und errichte aus B auf AC das Loth BD (I, 11. S.), so ist BD die zu findende Linie.

Beweis.

Wenn man die Verbindungslinien AD und DC zieht, so ist ∠ ADC = R, (III, 31. S.) Da nun DB das Loth vom rechten Winkel auf die Grundlinie AC ist, so ist auch BD die mittlere Proportionallinie zu AB und BC. (VI, 8. Zus.) oder

AB : BD = BD : BC.

Der 14. Satz.

Lehrsatz.

Wenn zwei Parallelogramme einander gleich sind, und ein Winkel des einen einem Winkel

des andern gleich ist, so sind die Seiten, welche die gleichen Winkel bilden, im umgekehrten Verhältnisse. Und wenn in zwei Parallelogrammen ein Winkel des einen einem Winkel des andern gleich ist, und die Seiten welche diese Winkel bilden, im umgekehrten Verhältnisse sind, so sind die Parallelogramme einander gleich.

Es seien (Fig. 140.) FADB und EBGC zwei gleiche Parallelogramme, worin ∡ FBD = ∡ EBG, so ist

BD : BE = GB : BF. Wenn aber

∡ FDB = ∡ EBG, und

DB : BE = GB : BF ist, so sind die Parallelogramme FADB und EBGC einander gleich.

Beweis.

I. Wenn FADB = EBGC, so lege man BD und EB in eine gerade Linie EBD, so müssen auch die Linien FB und BG eine gerade Linie FBG bilden, (I, 14. S.) Wird nun das Parallelogramm FBEH vollendet, so ist, weil FADB = EBGC, nun auch FADB : HFBE = EBGC : HFBE nun ist

FADB : HFBE = BD : EB (VI, 1. S.) und

EBGC : HFBE = GB : BF, folglich auch

BD : EB = GB : BF.

II. Wenn aber DB : BE = GB : BF ist, so hat man

DB : BE = FADB : HFBE (VI, 1. S.)

und GB : BF = EBGC : HFBE, folglich

auch FADB : HFBE = EBGC : HFBE oder

FADB : EBGC = HFBE : HFBE, daher

FADB = EBGC.

Der 15. Satz.

Lehrsatz.

Wenn zwei Dreiecke einander gleich sind, und ein Winkel des einen gleich ist einem Winkel des andern, so sind die Seiten, welche die gleichen Winkel bilden, einander umgekehrt proportional;

und wenn in zwei Dreiecken ein Winkel des einen gleich ist einem Winkel des andern und die Seiten, welche diese Winkel bilden, im umgekehrten Verhältnisse stehen, so sind die Dreiecke einander gleich.

Es seien (Fig. 141.) die Dreiecke BAC und DAE einander gleich, auch ∡ BAC = ∡ DAE, so ist CA : AD = EA : AB, und wenn ∡ BAC = ∡ DAE auch CA : AD = EA : AB ist, so ist auch Δ CAB = Δ EAD.

Beweis.

I. Es sei Δ ABC = Δ ADE. Bringt man hier CA und AD in eine gerade Linie CAD, so liegen auch EA und AB in einer geraden Linie (I, 14 S.) Zieht man die Verbindungslinie BD, so ist, weil Δ ACB = Δ ADE, nun auch

Δ ACB : Δ BAD = Δ ADE : Δ BAD. Allein
Δ ABC : Δ BAD = CA : AD folglich
Δ ADE : Δ BAD = CA : AD aber
Δ ADE : Δ BAD = EA : AB folglich
CA : AD = EA : AB.

II. Es sei CA : AD = EA : AB Hier ist nun
CA : AD = Δ ABC : Δ BAD (VI, 1. S.)
folglich EA : AB = Δ ABC : Δ BAD. Da nun
EA : AB = Δ ADE : Δ BAD, so ist
Δ ABC : Δ BAD = Δ ADE : Δ BAD oder
Δ ABC : Δ ADE = Δ BAD : Δ BAD folglich auch
Δ ABC = Δ ADE.

Der 16. Satz.

Lehrsatz.

Wenn vier gerade Linien einander proportional sind, so ist das von der ersten und vierten gebildete Rechteck dem Rechtecke aus der zweiten und dritten gleich. Und wenn das Rechteck aus der ersten und vierten dem Rechtecke aus der zweiten und dritten gleich ist, so sind die vier gerade Linien proportional.

Es seien (Fig. 142.) die geraden Linien AB, CD, E und F proportional, so daß AB : CD = E : F, so ist das Rechteck aus AB und F dem Rechtecke aus CD und E gleich. Und wenn das Rechteck aus AB und F dem Rechtecke aus CD und E gleich ist, so ist auch AB : CD = E : F.

Beweis.

I. Es sei AB : CD = E : F. Errichtet man nun auf BA in A das Loth AG = F (I, 11. S.) und auf DC in C das Loth CH = E, und vollendet die Parallelogramme GKBA und HLDC, so ist, weil AB : CD = E : F nun auch

AB : CD = CH : AG. Es ist aber auch

∡ BAG = ∡ DCH = R, folglich

GKBA = BLDC (VI, 14. S.)

Daher ist das Rechteck aus AB und F dem Rechtecke aus CD und E gleich.

II. Es sei das Rechteck aus AB und F dem Rechtecke aus CD und E gleich, oder, welches einerlei ist, das Parallelogramm GKBA dem Parallelogramme HLDC, so ist, weil

∡ GAB = ∡ HCD = R, nun auch

AB : CD = CH : AG (VI, 14. S.) Allein

CH = E und AG = F, folglich auch

AB : CD = E : F.

Der 17. Satz.

Lehrsatz.

Wenn drei gerade Linien eine Proportion bilden, so ist das Rechteck aus den zwei äußersten dem Quadrate der mittlern gleich, und wenn das Rechteck aus den äußersten dem Quadrate der mittelsten gleich ist, so sind die drei geraden Linien proportional.

Es sei (Fig. 143.) A : C = B : C, so ist das Rechteck aus A und C dem Quadrate von B gleich. Und wenn das Rechteck von A und C dem Quadrate von B gleich ist, so ist auch A : B = B : C.

Beweis.

I. Man nehme die Linie D = der Linie B, so ist, weil

A : B = B : C nunmehr auch

A : B = D : C und daher das Rechteck aus A und C dem Rechtecke aus B und D gleich (VI, 16. S.) Allein das Rechteck aus B und D ist dem Rechtecke aus B und B, das heißt, dem Quadrate von B gleich; folglich ist der Satz bewiesen.

II. Da das Rechteck aus A und C dem Quadrate von B und auch dem Rechtecke aus B und D gleich ist, so muß auch

A : B = D : C seyn. (VI, 16. S.) Allein es ist

B = D folglich auch

A : B = B : C.

Der 18. Satz.

Aufgabe.

Auf einer gegebenen geraden Linie eine geradlinige Figur zu beschreiben, welche einer andern gegebenen geradlinigen Figur ähnlich ist und eine ähnliche Lage mit ihr hat.

Man soll auf die gerade Linie (Fig. 144.) AB eine geradlinige Figur beschreiben, welche der gegebenen CFED ähnlich ist und eine ähnliche Lage mit ihr hat.

Auflösung und Beweis.

Man mache ∠ BAG = ∠ DCF (I, 23. S.) ferner ∠ ABG = ∠ CDF, dann ∠ BGH = ∠ DFE und endlich ∠ GBH = ∠ FDE, so ist auch

∠ AGB = ∠ CFD (I, 32. S.) und

∠ GHB = ∠ FED.

Da nun hierdurch die Seiten, welche gleiche Winkel bilden, proportional seyn müssen (VI, 4. S.) so ist

AGHB ∾ CFED (VI, 1. Erkl.)

Der 19. Satz.

Lehrsatz.

Aehnliche Dreiecke stehen in einem zweifach höhern Verhältnisse ihrer homologen Seiten.

Es sei (Fig. 145.) $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, so ist

$$\triangle ABC : \triangle DEF = (BC : EF)^2.$$

Beweis.

Man nehme zu den Linien BC und EF die dritte Proportionallinie BG (VI, 11. S.) so daß $BC : EF = EF : BG$,
und folglich auch $BC : BG = (BC : EF)^2$
ist und ziehe die gerade AG.

Da nun $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ und $\angle ABC = \angle DEF$, so ist
auch $AB : BC = DE : EF$ (VI, 1. Erkl.) folglich
$AB : DE = BC : EF$. Nun war aber
$BC : EF = EF : BG$, daher ist
$AB : DE = EF : BG$, und daher auch
$\triangle ABG = \triangle DEF$. (VI, 15. S.) Es ist aber
$BC : BG = \triangle ABC : \triangle ABG$ (VI, 1. S.) folglich
$BC : BG = \triangle ABC : \triangle DEF$. Allein es war
$BC : BG = (BC : EF)^2$, folglich ist
$\triangle ABC : \triangle DEF = (BC : EF)^2$.

Zusatz.

Da gezeigt wurde, daß
$\triangle ABC : \triangle ABG = CB : BG$ oder
$\triangle ABC : \triangle DEF = CB : BG$, so folgt, daß, wenn drei gerade Linien proportional sind, die erste sich zur dritten verhält, wie das Dreieck über der ersten zu dem ihm ähnlichen und ähnlich liegenden Dreiecke über der zweiten.

Der 20. Satz.

Lehrsatz.

Aehnliche Vielecke lassen sich in gleichviele einander ähnliche, und den Ganzen homologe Dreiecke

theilen. Und ähnliche Vielecke stehen im zweifach höhern Verhältnisse ihrer homologen Seiten.

Es sei (Fig. 146.) DEABC ähnlich KLFGH, so können beide Vielecke in gleichviele einander ähnliche und den Ganzen homologe Dreiecke getheilt werden. Auch ist

$$DEABC : KLFGH = (AB : FG)^2.$$

Beweis.

I. Man ziehe die geraden Linien BE und EC, so wie auch GL und LH. Da nun DEABC ∾ KLFGH, so ist auch

∡ BAE = ∡ GFL (VI, 1. Erkl.) und daher

BA : AE = GF : FL. Somit ist ferner

Δ BAE ∾ Δ FGL (VI, 4. S.) und daher

∡ ABE = ∡ FGL. Weil aber die beiden Vielecke einander ähnlich sind, so ist auch

∡ ABC = ∡ FGH, daher auch

∡ EBC = ∡ LGH. (I, 3. Gr.) Da nun

Δ ABE ∾ Δ FGL, so ist

EB : BA = LG : GF und weil

DEABC ∾ KLFGH, so ist auch

AB : BC = FG : GH, und daher

EB : BC = LG : GH. Daher ist auch

Δ BCE ∾ Δ GHL (VI, 4. S.) Ebenso wird bewiesen, daß auch Δ CDE ∾ Δ HKL. Folglich sind die Vielecke in gleichviele unter sich ähnliche Dreiecke zerlegt.

II. Man ziehe die geraden Linien AC und FH, so ist, wegen der Aehnlichkeit beider Vielecke,

∡ ABC = ∡ FGH und daher

AB : BC = FG : GH; folglich sind die Dreiecke ACB und FHG gleichwinkelig, oder es ist

∡ BAC = ∡ GFH und

∡ BCA = ∡ GHF. Daher ist in den Dreiecken AMB und FNG nunmehr ∡ MAN = ∡ NFG. Es war aber

∡ ABM = ∡ FGN, folglich ist

auch ∡ AMB = ∡ FNG. (I, 32. S.)

Daher haben die Dreiecke AMB und FNG gleiche Winkel, und auf gleiche Art wird bewiesen, daß auch die Dreiecke CMB und HNG gleichwinkelig sind. Daher ist

AM : MB = FN : NG, und
BM : MC = GN : NH (VI, 4. S.) folglich
AM : MC = FN : NH. Es ist aber
AM : MC = △ BAM : △ BMC = △ EAM : △ EMC (VI, 1. S.) und daher AM : MC = △ ABE : △ BEC. Ebenso wird erwiesen, daß FN : NH = △ FGL : △ GLH; folglich ist
△ ABE : △ BEC = △ FGL : △ GLH, daher
△ ABE : △ FGL = △ BEC : △ GLH. Wenn man nun die Linien BD und GK zieht, so wird ebenso bewiesen, daß △ BEC : △ GLH = △ ECD : △ LHK, folglich ist
△ ABE : △ FGL = ABCDE : FGHKL. Demnach sind diese ähnliche Dreiecke, in welche die Vielecke zertheilt wurden, den Vielecken homolog, d. h. diese Dreiecke sind so proportional, daß die Dreiecke des Vielecks ABCDE die Vorderglieder, und die Dreiecke des Vielecks FGHKL die Hinterglieder in der Proportion sind.

Ein anderer Beweis.

Da zuvor (in I.) bewiesen worden ist, daß die Dreiecke des einen Vielecks den Dreiecken des andern ähnlich sind, so ist
△ ABE : △ FGL = $(BE : GL)^2$ = △ EBC : △ LGH (VI, 19. S.) Ebenso wird bewiesen, daß
△ EBC : △ LGH = $(EC : LA)^2$ = △ ECD : △ LHK.
Daher ist auch
△ ABE : △ FGL = △ EBC : △ LGH = △ ECD : △ LHK.
Somit sind die Dreiecke ABE, EBC und ECD die Vorderglieder und die Dreiecke FGL : LGH und LHK die Hinterglieder. Daher ist △ ABE : △ FGL = ABCDE : FGHKL.

III. Da so eben bewiesen worden ist, daß
△ ABE : △ FGL = ABCDE : FGHKL und
△ ABE : △ FGL = $(AB : FG)^2$ (VI, 19. S.) so ist auch ABCDE : FGHKL = $(AB : FG)^2$.

Erster Zusatz.

Auf gleiche Art kann man auch von ähnlichen Vierecken beweisen, daß sie in dem zweifach höheren Verhältnisse ihrer homologen Seiten stehen. Es ist aber auch ebendieses von den Dreiecken erwiesen (VI, 19. S.). Folglich sind überhaupt alle

ähnliche geradlinige Figuren in zweifach höherem Verhältnisse ihrer homologen Seiten.

Zweiter Zusatz.

Wenn man zu AB und FG die dritte Proportionallinie O sucht, so ist AB : O = $(AB : FG)^2$. Nun ist auch irgend eine geradlinige Figur auf AB zu einer ihr ähnlichen und ähnlich liegenden Figur auf FG im zweifach höheren Verhältnisse von AB : FG. Wenn daher drei gerade Linien AB, FG und O proportional sind, so verhält sich die erste oder AB so zur dritten oder O, wie sich irgend eine geradlinige Figur auf AB zu einer ihr ähnlichen und ähnlich liegenden Figur auf FG verhält.

Der 21. Satz.

Lehrsatz.

Wenn jede von zwei geradlinigen Figuren der nämlichen dritten ähnlich ist, so sind auch jene zwei Figuren unter sich ähnlich.

Es sei (Fig. 147.) sowohl die geradlinige Figur A, als auch die Figur B der dritten Figur C ähnlich, so ist auch A $\sim$ B.

Beweis.

Da A und B einander ähnlich sind, so sind sie auch gleichwinkelig, und die Seiten welche gleiche Winkel einschließen, einander proportional. (VI, 1. Erkl.) Nun sind auch die Figuren B und C einander ähnlich, und daher ebenfalls gleichwinkelig und die, gleiche Winkel einschließenden Seiten einander proportional. Daher müssen auch die Figuren A und B gleichwinkelig seyn, (I, 1. Gr.) so wie auch die Seiten, welche gleiche Winkel einschließen, einander proportional seyn müssen. Folglich sind auch die Figuren A und B einander ähnlich (VI, 1. Erkl.)

Der 22. Satz.

Lehrsatz.

Wenn vier gerade Linien proportional sind, so müssen auch die auf denselben beschriebenen ähn-

lichen und ähnlich liegenden geradlinigen Figuren einander proportional seyn. Und wenn die auf vier geraden Linien beschriebenen ähnlichen und ähnlich liegenden Figuren einander proportional sind, so müssen auch diese vier geraden Linien einander proportional seyn.

Es sei (Fig. 148.) AB : CD = EF : GH und
△ KAB ∾ △ LCD, ferner
MVFE ∾ NWHG, so ist auch
△ KAB : △ LCD = MVFE : NWHG.
Wenn aber umgekehrt △ KAB ∾ △ LCD, ferner
MVFE ∾ NWHG, und △ KAB : △ LCD = MVFE : NWHG,
so muß auch AB : CD = EF : GH seyn.

B e w e i s.

I. Es sei AB : CD = EF : GH. Macht man nun
AB : CD = CD : O (VI, 11. S.) und
EF : GH = GH : P, so ist auch
CD : O = GH : P. Es war aber
AB : CD = EF : GH, daher ist
AB : O = EF : P. Allein
AB : O = △ KAB : △ LCD (VI, 20. S.)
Und EF : P = MVFE : NWHG, folglich ist auch
△ KAB : △ LCD = MVFE : NWHG.

II. Es sei ferner △ KAB : △ LCD = MVFE : NWHG. Nimmt man nun AB : CD = EF : QR (VI, 12. S.) beschreibet auf QR eine der MVFE und der NWHG ähnliche und ähnlich liegende Figur SZRQ, so ist nach dem ersten Theile des Beweises △ KAB : △ LCD = MVFE : SZRQ. Es ist aber △ KAB : △ LCD = MVFE : NWHG nach der Annahme, folglich muß auch
MF : SR = MF : NH und daher auch
SR = NH seyn. Weil aber nun
MVFE ∾ NWHG und auch
MVFE ∾ SZRQ, so ist auch
SRZQ ∾ NWHG (VI, 21. S.)
Daher ist (man sehe den nachfolgenden Lehnsatz)

QR = GH. Es war aber

AB : CD = EF : QR, folglich ist auch

AB : CD = EF : GH.

Lehnsatz.

Daß aber, wenn geradlinige Figuren einander gleich und ähnlich sind, ihre homologe Seiten einander gleich seyn müssen, kann auf folgende Art bewiesen werden.

Es seien die geradlinigen Figuren NWHG und SZRQ einander gleich und ähnlich, so müssen die homologen Seiten QR und GH einander gleich seyn.

Beweis.

Wenn diese Linien QR und GH ungleich wären, so sei die eine, etwa QR, die größere. Da nun SZRQ ∾ NWHG, so ist

QR : QS = GH : GN und folglich

QR : GH = QS : GN. Nun ist

QR > GH, folglich auch

QS > GN und daher auch

SZRQ > NWHG (VI, 20. S.) welches mit dem Erwiesenen, daß SZRQ = NWHG ist, im Widerspruche steht.

Anderer Beweis.

Da △ KAB : △ LCD = MVFE : NWHG, aber

△ KAB : △ LCD = $(AB : CD)^2$ (VI, 20. Zus.)

und MVFE : NWHG = $(EF : GH)^2$ so ist

$(AB : CD)^2 = (EF : GH)^2$ und folglich

AB : CD = EF : GH.

Der 23. Satz.

Lehrsatz.

Wenn Parallelogramme gleichwinkelig sind, so stehen sie in einem zusammengesetzten Verhältnisse ihrer Seiten.

Es seien die Parallelogramme (Fig. 149.) ABCD und CGFE gleichwinkelig, so stehen sie im zusammengesetzten Verhältnisse ihrer Seiten BC, CG und DC, CE.

B e w e i s.

Wenn man die Seiten BC und CG in eine gerade Linie BCG legt, so bilden, weil Winkel BCD = Winkel ECG (I, 14. S.) auch die Seiten DC und CE eine gerade Linie DCE. Man vollende nun das Parallelogramm DHGC und es sei K eine angenommene gerade Linie.

Macht man nun BC : CG = K : L (VI, 12. S.) und
DC : CE = L : M, so ist das Verhältniß
K : M aus den Verhältnissen
K : L und L : M oder aus den ihnen gleichen Verhältnissen
BC : CG und DC : CE zusammengesetzt (VI, 5. Erkl.) Weil
nun BC : CG = ADCB : DHGC (VI, 1. S.) und
DC : CE = DHGC : CGFE, so ist auch
K : L = ADCB : DHGC und
L : M = DHGC : CGFE. Daher denn
K : M = ADCB : CGFE und es ist auch das Verhältniß von ADCB : CGFE aus den beiden Verhältnissen von BC : CG und von DC : CE zusammengesetzt.

D e r 24. S a ß.

L e h r s a ß.

In jedem Parallelogramme sind die um die Diagonale herliegenden Parallelogramme sowohl dem Ganzen, als auch einander selbst ähnlich.

Es sei (Fig. 150.) ABCD das Parallelogramm, AC seine Diagonale, um welche die Parallelogramme AEFG und FHCK herliegen, so sind diese drei Parallelogramme einander ähnlich.

B e w e i s.

Da in dem Dreiecke ABC die EF parallel mit BC und in dem Dreiecke ADC die FG parallel mit CD ist, so hat man
BE : EA = CF : FA, und auch
DG : GA = CF : FA (VI, 2. S.) folglich auch
BE : EA = DG : GA und daher

BA : AE = DA : AG, also auch

BA : AD = EA : AG. Folglich sind in den Parallelogrammen ABCD und AEFG die Seiten um den gemeinschaftlichen Winkel BAD einander proportional.

Da nun GF mit DC parallel, so ist

∡ AGF = ∡ ADC (I, 29. S.) und

∡ GFA = ∡ DCA. Da nun

∡ DAC = ∡ DAC, so sind die beiden Dreiecke ADC und AGF gleichwinkelig.

Auf eben diese Art wird bewiesen, daß die Dreiecke ABC und AEF gleichwinkelig sind. Daher müssen auch die Parallelogramme ABCD und AEFG gleichwinkelig seyn. Da nun

AD : DC = AG : GF (VI, 4. S.) und

CB : BA = FE : EA, ferner

DC : CA = GF : FA und

AC : CB = AF : FE, so ist

DC : CB = GF : FE. Es war aber nach dem Vorigen BA : AD = AE : AG, daher sind in den gleichwinkeligen Parallelogrammen ABCD und AEFG die Seiten, welche gleiche Winkel bilden, einander proportional; folglich diese Parallelogramme einander ähnlich. (VI, 1. Erkl.)

Auf eben diese Art wird bewiesen, daß auch

FHCK ∾ ABCD. Folglich muß auch

AEFG ∾ FHCK seyn. (VI, 21. S.)

Der 25. Satz.

Aufgabe.

Eine geradlinige Figur zu bilden, die einer gegebenen geradlinigen ähnlich und einer andern gegebenen gleich ist.

Es sei (Fig. 151.) ABC die gegebene Figur, welcher man eine andere ähnlich machen soll, und D sei jene Figur, welcher sie gleich seyn soll.

Auflösung.

Man beschreibe auf BC ein Parallelogramm BCEL, welches dem Dreiecke ABC gleich ist (I, 44. S.) und auf die Linie

CE unter dem Winkel CBL ein Parallelogramm CEMF, welches der Figur D gleich ist (I, 45. S.) so liegen BC und CF, so wie auch LE und EM in einer geraden Linie (I, 14. S.) Nun nehme man zu CB und CF die mittlere Proportionallinie GH (VI, 13. S.) und beschreibe über GH ein Dreieck GHK, welches dem Dreiecke CBA ähnlich ist und ähnlich liegt. (VI, 18. S.)

B e w e i s.

Da hier BC : GH = GH : CF, so ist auch

BC : CF = △ ABC : △ KGH (VI, 20. Zus.)

Nun ist aber BC : CF = CBLE : CFME (VI, 1. S.) daher auch △ ABC : △ KGH = CBLE : CFME, folglich

△ ABC : CBLE = △ KGH : CFME. Es ist aber

△ ABC = CBLE, folglich auch

△ KGH = CFME = D.

D e r 26. S a t z.

L e h r s a t z.

Wenn von einem Parallelogramme ein ihm ähnliches und ähnlich liegendes unter einem gemeinschaftlichen Winkel abgeschnitten wird, so liegen beide um einerlei Diagonale.

Es werde (Fig. 152.) von dem Parallelogramme ADBC das ihm ähnliche und ähnlich liegende Parallelogramm AGFE unter dem nämlichen Winkel DAB abgeschnitten, so liegen beide um die nämliche Diagonale AFC.

B e w e i s.

Wenn diese beiden Parallelogramme nicht um die nämliche Diagonale lägen, so müßte die Diagonale des Parallelogramms ADCB nicht durch den Punct F gehen. Man nehme an, sie ginge durch einen andern Punct, etwa durch H und sei AHC. Man ziehe durch H die HK mit AD und BC gleichlaufend, so ist ADCB ∾ AGHK (VI, 24. S.) Folglich

DA : AB = GA : AK (VI, 1. Erkl.) Weil aber

ADCB ∾ AGFE, so hat man

DA : AB = GA : AE (VI, 1. Erkl.) Daher

müßte GA : AK = GA : AE, oder

GA : GA = AK : AE, folglich

AK = AE seyn, welches widersprechend ist (I, 9. Gr.)

Der 27. Satz.

Lehrsatz.

Ein Parallelogramm auf der Hälfte einer gegebenen geraden Linie ist größer, als jedes andere Parallelogramm auf einem beliebigen Abschnitte derselbigen Linie, dessen Ergänzung auf dem übrigen Abschnitte dem Parallelogramm auf der Hälfte ähnlich ist und ähnlich liegt.

Es sei (Fig. 153.) die gegebene gerade Linie AB in C halbirt, so ist der Abschnitt, auf welchem das andere Parallelogramm beschrieben werden soll, entweder größer oder kleiner, als die Hälfte AC.

Beweis.

I. Es sei AK der gegebene Abschnitt und AK > AC. Man beschreibe auf AC das Parallelogramm ACDV und dessen Ergänzung CBED; ebenso auf AK ein anderes Parallelogramm AKFG und dessen Ergänzung KBHF ∾ CBED ∾ ACDV, so ist zu beweisen, daß ACDV > AKFG. Da die Parallelogramme CBED und KBHF einander ähnlich sind, so liegen beide um einerlei Diagonale. (VI, 26. S.)

Man ziehe diese Diagonale DFB und vollende die Figur, so ist, weil CKFL = FHEQ (I, 43. S.) und

KBHF = KBHF, nun auch

CBHL = KBEQ. Es ist aber, weil

AC = CB, auch CBHL = ACLG (I, 36. S.)

daher ist ACLG = KBEQ, allein

CKFL = CKFL, daher

AKFG = Gnom. LMN; folglich muß CBED oder ACDV größer, als AKFG seyn.

II. Es sei (Fig. 154.) AD der gegebene Abschnitt und $AD < AC$. Man beschreibe auf AC das Parallelogramm ACLK, dessen Ergänzung CBML ist, und auf AD ein anderes Parallelogramm ADEH, dessen Ergänzung $DBFE \backsim CBML \backsim ACLK$ ist, so ist zu beweisen, daß $ACLK > ADEH$.

Da die Parallelogramme DEFB und CLMB einander ähnlich sind, so liegen beide um einerlei Diagonale (VI, 26. S.) Wird nun diese Diagonale ELB gezogen und die Figur vollendet, so ist, weil $FG = GH$, nunmehr auch

$LGFM = LGHK$ (I, 36. S.) und daher
$LGFM > LGEV$. Es ist aber
$LGFM = LVDC$ (I, 43. S.), daher auch
$LVDC > EHKV$. Allein
$KVDA = KVDA$, folglich
$AKLC > AHED$.

Der 28. Satz.

Aufgabe.

Auf dem Abschnitte einer gegebenen geraden Linie ein Parallelogramm dergestalt zu beschreiben, daß es einer gegebenen geradlinigen Figur, welche nicht größer, als das Parallelogramm auf der halben Linie ist, gleich sei, und daß seine Ergänzung auf dem andern Abschnitte einem gegebenen, der Ergänzung des Parallelogramms auf der halben Linie ähnlichen Parallelogramme gleich sei.

Es sei (Fig. 155.) AB die gegebene gerade Linie und C die gegebene geradlinige Figur, welcher man eine andere auf der Linie AB gleich machen soll; auch sei C nicht größer, als das Parallelogramm auf der Hälfte der Linie. Ferner seien die Ergänzungen einander ähnlich und die Figur, welcher die Ergänzung ähnlich seyn soll, sei D, und man soll auf AB ein der Figur C gleiches Parallelogramm beschreiben, welches ein der Figur D ähnliches Parallelogramm zur Ergänzung hat.

Auflösung und Beweis.

Es sei die gegebene gerade Linie AB in E halbirt. Man beschreibe auf BE das Parallelogramm BEGF, welches dem gegebenen D ähnlich und ähnlich liegend ist, (VI, 18. S.) und vollende das Parallelogramm AEGH, so ist dieses Parallelogramm AEGH, welches nicht kleiner als C seyn darf, entweder ebenso groß, oder größer als C. Wäre das erste, so wäre auch die Aufgabe schon aufgelöset, da auf dem Abschnitte AE ein Parallelogramm AEGH beschrieben wäre, welches = C und dessen Ergänzung EGFB ∾ D ist.

Wäre aber AHGE > C, so ist, weil
AHGE = EGFB auch
EGFB > C. Nun beschreibe man ein Parallelogramm KLMN, welches dem Ueberschusse von EGFB über C gleich und dem gegebenen Parallelogramme D ähnlich und ähnlich liegend ist (VI, 25. S.) Dieses Parallelogramm ist daher auch dem Parallelogramme EGFB ähnlich; so, daß LK der GE und LM der GF homolog, und LK : LM = GE : GF ist.

Nun ist aber EGFB = C + KLMN und daher
EGFB > KLMN, folglich auch
GE > LK (VI, 20. Zus.) und
GF > LM. Nun mache man
GZ = LK und GO = LM, und vollende das Parallelogramm ZGOP, so ist
ZGOP ≅ KLMN. Es ist aber
KLMN ∾ EGFB, daher auch
ZGOP ∾ EGFB (VI, 21. S.) Folglich liegen beide um die nämliche Diagonale (VI, 26. S.) Man ziehe diese Diagonale GPB und vollende die Figur.

Da hier EGFB = C + KLMN und auch
ZGOP = KLMN, so ist
EGFP = C + ZGOP, und daher Gnom.
TVX = C. Da aber
OFQP = ZPRE (I, 34. S.) und
PQBR = PQBR, so ist auch

OFBR = EZQB = EZSA. Allein
ZPRE = ZPRE, folglich Gnom.
TVX = SPRA, und daher
SPRA = C. Demnach ist auf dem Abschnitte AR ein Parallelogramm ARPS beschrieben, welches = C und dessen Ergänzung RPQB ∾ ZGOP ∾ D ist. (VI, 24. S.)

Der 29. Satz.

Aufgabe.

Auf eine gegebene gerade Linie ein Parallelogramm so zu beschreiben, daß es nebst seiner, einem gegebenen Parallelogramme ähnlichen Ergänzung auf der in gleicher Richtung angesetzten Linie, einer gegebenen geradlinigen Figur gleich ist.

Es sei (Fig. 156.) die gegebene gerade Linie AB; die gegebene geradlinige Figur, welcher eine andere auf AB gleich werden soll, sei C; jene aber, welcher der Ueberschuß ähnlich seyn soll, sei D. Man soll auf AB ein der Figur C gleiches Parallelogramm bilden, welches ein, der Figur D ähnliches Parallelogramm zum Ueberschusse hat.

Auflösung.

Man halbire die AB in E, beschreibe auf EB ein Parallelogramm EFLB, welches dem gegebenen Parallelogramme D ähnlich ist (VI, 18. S.) und ein Parallelogramm GKHV welches = EFLB + C und ∾ D, folglich auch ∾ EFLB ist (VI, 25. S.) und es sei

KH : KG = FL : FE. Nun ist
GKHV > EFLB, daher auch
KH > FL und
KG > FE.

Man verlängere FL über L, mache FM = KH, und verlängere FE über E, und mache FN = KG, vollende auch das Parallelogramm NFMZ, so ist

NFMZ ≅ GKHV. Es ist aber

GKHV ∾ EFLS, daher auch

NFMZ ∾ EFLS und beide Parallelogramme müssen um einerlei Diagonale liegen. (VI, 26. S.) Man ziehe diese Diagonale FBZ und vollende die Figur.

Beweis.

Da GKHV = EFLB + C und

GKHV = NFMZ, so ist auch

NFMZ = EFLB + C und daher Gnom.

QRS = C.

Es ist aber, weil AE = EB, auch

AENW = EBPN = LMOB (I, 43. S.) Allein

NEOZ = NEOZ. Daher

AOZW = Gnom. QRS und folglich

AOZW = C.

Daher ist auf AB ein Parallelogramm ABPW beschrieben, welches nebst seiner, der Figur D ähnlichen Ergänzung PBOZ der gegebenen Figur C gleich ist.

Der 30. Satz.

Aufgabe.

Eine gegebene begränzte gerade Linie nach stetiger Proportion zu theilen.

Es sei (Fig. 157.) AB die gegebene gerade Linie, welche nach stetiger Proportion getheilt werden soll.

Auflösung.

Man bilde über AB das Quadrat ABGC (I, 46. S.) und beschreibe auf AC ein dem Quadrate ABGC gleiches Parallelogramm CHDF, welches die, der Figur ABGC ähnliche Figur AHDE zum Ueberschusse hat.

Beweis.

Da ABGC ein Quadrat ist, so muß auch AHDE ein Quadrat seyn. Da ferner

CHDF = CABG und

CAEF = CAEF, so muß auch

AHDE = FEBG seyn.

Aber AHDE und FEBG sind gleichwinkelig, folglich ist

FE : ED = AE : EB (VI, 14. S.) Es ist aber

FE = CA = AB (I, 34. S.) und

ED = AE, daher auch

BA : AE = AE : EB. Es ist aber

BA > AE, daher auch

AE > EB. Folglich ist die Linie AB in E nach stetiger Proportion getheilt. (VI, 3. Erkl.)

Andere Auflösung.

Man schneide die Linie AB so in dem Puncte E, daß das Rechteck aus AB und BE dem Quadrate von AE gleich ist (II, 11. S.) so muß auch BA : AE = AE : EB seyn (VI, 17. S.) und AB ist in E auf die verlangte Art getheilt. (VI, 3. Erkl.)

Der 31. Satz.

Lehrsatz.

In jedem rechtwinkeligen Dreiecke ist die Figur auf der, dem rechten Winkel gegenüber liegenden Seite so groß, als die beiden ihr ähnlichen und ähnlich liegenden Figuren auf den beiden andern Seiten zusammengenommen.

Es sei (Fig. 158.) BAC das rechtwinkelige Dreieck, worin ∡ BAC = R, so ist die über BC beschriebene Figur so groß, als die beiden über AB und AC beschriebenen ihr ähnlichen und ähnlich liegenden F und G zusammengenommen.

Beweis.

Wenn man aus dem Puncte A auf BC das Loth AD zieht, so ist △ ABC ∾ △ ADB (VI, 8. S.), daher

CB : BA = BA : BD, und folglich

CB : BD = E : F (VI, 20. Zus.)

Auf gleiche Art wird bewiesen, daß

CB : CD = E : G. Daher ist auch

CB : BD + CD = E : F + G. Es ist aber

CB = BD + CD, folglich auch

E = F + G.

Anderer Beweis.

Da die, über den drei Seiten des rechtwinkeligen Dreiecks beschriebenen Figuren einander ähnlich sind, so ist

E : F = $(BC : AB)^2$ (VI, 23. S.) Es ist aber Qdr. BC : Qdr. AB = $(BC : AB)^2$ (VI, 20. Zus.) folglich auch E : F = Quadr. BC : Quadr. AB.

Ebenso wird bewiesen, daß

E : G = Quadr. BC : Quadr. AC. Daher ist

E : F + G = Quadr. BC : Quadr. AB + Quadr. AC.

Es ist aber auch

Quadr. BC = Quadr. AB + Quadr. AC (I, 47. S.)

Daher E = E + G.

Der 32. Satz.

Lehrsatz.

Wenn zwei Dreiecke, worin zwei Seiten des einen zweien Seiten des andern proportional sind, so aneinander gebracht werden, daß ihre homologen Seiten parallel sind, so liegen ihre dritten Seiten in einer geraden Linie.

Es sei (Fig. 159.) in den Dreiecken BAC und CDE die BA : AC = CD : DE, und es sei AB mit DC; auch AC mit DE gleichlaufend, so liegen die Seiten BC und CE in einer geraden Linie BCE.

Beweis.

Da die Seite AB mit DC und die Seite AC mit DE gleichlaufend ist, so ist auch

∢ BAC = ∢ ACD (I, 29. S.) und

∢ CDE = ∢ ACD, daher auch

∢ BAC = ∢ CDE. Da nun nach der Annahme

BA : AC = CD : DE, so sind auch die Dreiecke ABC und DCE gleichwinkelig (VI, 6. S.) folglich ist

∢ ABC = ∢ DCE. Es war aber auch

∢ BAC = ∢ ACD. Daher ist

∢ ABC + ∢ BAC = ∢ ECA. Allein

∢ ACB = ∢ ACB. Folglich

$\measuredangle ABC + \measuredangle BAC + \measuredangle ACB = \measuredangle ACE + \measuredangle ACB.$
Aber $\measuredangle ABC + \measuredangle BAC + \measuredangle ACB = 2\,R$ (I, 32. S.), folglich auch $\measuredangle ACE + \measuredangle ACB = 2\,R$, und daher BCE eine gerade Linie (I, 14. S.)

Der 33. Satz.

Lehrsatz.

In gleichen Kreisen stehen sowohl die Centriwinkel, als auch die Peripheriewinkel und ebenso die Ausschnitte in dem Verhältnisse der Kreisbogen, worauf sie sich befinden.

Es seien (Fig. 160.) in den gleichen Kreisen ABC und DEF an den Mittelpuncten G und H die Winkel BGC und EHF; an den Umkreisen aber die Winkel BAC und EDF, so ist

$\measuredangle BGC : \measuredangle EHF =$ Bog. BC : Bog. EF. Ferner
$\measuredangle BAC : \measuredangle EDF =$ Bog. BC : Bog. EF, endlich Ausschnitt BGC : Ausschnitt EHF = Bog. BC : Bog. EF.

Beweis.

I. Man nehme in beliebiger Menge die Kreisbogen CK, KL dem Bogen BC und die Kreisbogen FM, MN dem Bogen EF gleich, ziehe GK und GL, ferner HM und HN, so sind die Centriwinkel, die auf gleichen Bogen stehen, einander gleich. (III, 27. S.) Folglich sind Bogen BL, Winkel BGL vom Bogen BC und Winkel BGC, und ebenso Bogen EN, Winkel EHN von Bogen EF und Winkel EHF die Gleichvielfachen, und es ist

wenn Bog. BL > Bog. EN, auch $\measuredangle BGL > \measuredangle EHN$ und
wenn Bog. BL Bog. EN auch $\measuredangle BGL = \measuredangle EHN$ und
wenn Bog. BL < Bog. EN, auch $\measuredangle BGL < \measuredangle EHN$ (III, 27. S.)

Daher ist Bog. BC : Bog. EF $= \measuredangle BGC : \measuredangle EHF$.

Weil aber

$\measuredangle BGC = 2 \measuredangle BAC$ (III, 20. S.) und auch
$\measuredangle EHF = 2 \measuredangle EDF$, so ist
$\measuredangle BGC : \measuredangle EHF = \measuredangle BAC : \measuredangle EDF$, folglich auch
Bog. BC : Bog. EF $= \measuredangle BAC : \measuredangle EDF$.

II. Man ziehe die geraden Linien BC und CK, nehme zwischen B und C den willkührlichen Punct O, zwischen C und K den willkührlichen Punct P und ziehe BO, OC, CP, und PK.

Da hier GB = GC = GK, auch
∢ BGC = ∢ CGK, so ist auch
△ CGB = △ CGK (I, 4. S.) und folglich
BC = CK.

Da die Bogen BC und CK einander gleich sind, so sind auch ihre Reste vom ganzen Umfange gleich. Folglich stehen die Winkel BOC und CPK auf gleichen Bogen und sind daher einander gleich (III, 27. S.) Folglich sind auch die Segmente BOC und CPK einander ähnlich (III, 11. Erkl.) Allein ihre Grundlinien BC und CK sind einander gleich, folglich müssen auch die Segmente BOC und CPK einander gleich seyn. (III, 24. S.) Allein die Dreiecke CGB und CGK sind einander gleich, folglich sind es auch die Ausschnitte GBC und GCK.

Ebenso wird erwiesen, daß die Ausschnitte CGK und GKL einander gleich sind. Daher sind auch die drei Ausschnitte einander gleich. Daher sind Bog. BL und Ausschn. GBL von Bog. BC und Ausschn. GBC, und auf gleiche Weise Bog. EN und Ausschn. HEN von Bog. EF und Ausschn. HEF die Gleichvielfachen. Auch ist,

wenn Bog. BL > Bog. EN ist, auch Ausschn. GBL > Ausschnitt HEN,
wenn Bog. BL = Bog. EN ist, auch Ausschn. GBL = Ausschnitt HEN
wenn Bog. BL < Bog. EN ist, auch Ausschn. GBL < Ausschnitt HEN, folglich ist

Bog. BC : Bog. EF = Ausschn. GBC = Ausschnitt HEF.

Zusatz.

Hieraus geht hervor, daß auch die Kreisausschnitte BGC und EHF sich wie die Winkel am Mittelpuncte BGC und EHF verhalten.

Ende des sechsten Buchs.

Das eilfte Buch der Elemente des Euclides.

Dieses Buch handelt:

1) Als Vorbereitung zur Körperlehre (Stereometrie) von der Lage gerader Linien und ebener Flächen gegen Ebenen. Satz 1 — 19.

2) Von den Körperwinkeln. Satz 20 — 23.

3) Von den Parallelopipeden und dreieckigen Prismen. Satz 24 — 40.

Erklärungen zum eilften und zwölften Buche.

---

1. Ein Körper ist dasjenige, was eine Länge, Breite und Tiefe hat.

2. Die Grenze eines Körpers ist eine Fläche.

3. Eine gerade Linie steht auf einer Ebene lothrecht, wenn sie mit allen in derselben Ebene liegenden und sie berührenden geraden Linien rechte Winkel bildet.

4. Eine Ebene steht auf einer andern Ebene lothrecht, wenn alle gerade Linien, welche in der einen Ebene auf den gemeinschaftlichen Durchschnitt beider Ebenen senkrecht errichtet werden, auch auf der andern Ebene lothrecht stehen.

5. Die Neigung einer geraden Linie gegen eine Ebene ist der spitze Winkel, welchen sie mit einer andern geraden Linie bildet, die man durch zwei Puncte in der Ebene zieht, wovon der erste der Fußpunct jener ersten Linie, der andere aber jener Punct ist, in welchem ein irgendwo von ihr auf die Ebene gezogenes Loth eintrifft.

6. Die Neigung zweier Ebenen gegeneinander ist der spitze Winkel, der von zwei geraden Linien gebildet wird, welche in beiden Ebenen auf den gemeinschaftlichen Durchschnitt und aus dem nämlichen Puncte senkrecht errichtet werden.

7. Zwei Ebenen haben ähnliche Neigungen gegeneinander, wenn die ebenbemerkten Neigungswinkel einander gleich sind.

8. Parallele Ebenen sind jene, welche bei jeder Verlängerung niemals zusammentreffen.

9. Aehnliche Körper heißen jene, die von gleichvielen ähnlichen Ebenen begränzt werden.

10. Gleiche und ähnliche Körper sind jene, die von gleichvielen, gleichen und ähnlichen Ebenen eingeschlossen werden.

11) Ein körperlicher Winkel (eine Ecke) ist die Neigung, von mehr als zwei geraden Linien gegen einander, die einander berühren, ohne in einerlei Ebene zu liegen; oder: ein körperlicher Winkel ist jener, der von wenigstens drei ebenen Winkeln begränzt wird, welche in einem Puncte zusammentreffen, ohne in einerlei Ebene zu liegen.

12. Eine Pyramide ist jener Körper, der von Ebenen begränzt ist, welche von einer einzigen Ebene ausgehen und in einem Puncte ausser ihr zusammentreffen.

13. Ein Prisma ist ein Körper, der von Ebenen begränzt ist, unter welchen zwei einander gegenüberliegende sowohl gleich und ähnlich, als parallel; die übrigen aber Parallelogramme sind.

14. Eine Kugel ist jener Körper, welcher von einem Halbkreise beschrieben wird, wenn sich derselbe einmal ganz um seinen unbeweglichen Durchmesser herumbewegt.

15. Die Axe der Kugel ist die ebenbemerkte unbewegte Linie, um welche der Halbkreis gedreht wird.

16. Der Mittelpunct der Kugel ist eben jener Punct, welcher auch Mittelpunct des bemerkten Halbkreises ist.

17. Der Durchmesser der Kugel ist jene gerade Linie, welche durch den Mittelpunct geht, und an beiden Seiten von der Kugelfläche begränzt wird.

18. Ein Kegel ist jener Körper, welchen ein rechtwinkeliges Dreieck beschreibt, wenn dasselbe rings um eine den rechten Winkel bildende Seite gedreht wird. Dieses unverrückte Loth ist entweder ebenso groß, oder kleiner, oder größer, als das andere bewegte, und bildet hiedurch im ersten Falle einen rechtwinkeligen, im zweiten einen stumpfwinkeligen, und im dritten einen spitzwinkeligen Kegel.

19. Die Axe des Kegels ist die unbewegt bleibende Linie, um welche sich das Dreieck gedreht hat.

20. Die Grundfläche des Kegels ist jener Kreis, welcher von dem bewegten Lothe beschrieben wird.

21. Ein Cylinder ist jener Körper, welcher von einem rechtwinkeligen Parallelogramme beschrieben wird, wenn sich dasselbe rings um seine unbewegliche Seite dreht.

22. Die Axe des Cylinders ist jene unverrückte Seite, um welche sich das Parallelogramm gedreht hat.

23. Die Grundflächen des Cylinders sind jene Kreise, welche von den beiden entgegengesetzten bewegten Seiten des Parallelogramms beschrieben werden.

24. Kegel, so wie auch Cylinder, sind einander ähnlich, wenn ihre Axen und die Durchmesser ihrer Grundflächen einander proportional sind.

25. Ein Würfel (Cubus) ist jener Körper, der von sechs gleichen Quadraten eingeschlossen wird.

26. Ein Tetraëder ist ein Körper, der von vier gleichen und gleichseitigen Dreiecken begrenzt wird.

27. Ein Octaëder ist jener Körper, der von acht gleichen und gleichseitigen Dreiecken eingeschlossen wird.

28. Ein Dodecaëder ist ein Körper, der von zwölf gleichen, gleichseitigen und gleichwinkeligen Fünfecken begränzt wird.

29. Ein Icosaëder ist ein von zwanzig gleichen und gleichseitigen Dreiecken begrenzter Körper.

Der 1. Satz.

Lehrsatz.

Von einer geraden Linie kann nicht ein Theil in einer Ebene und ein anderer Theil ausserhalb dieser Ebene liegen.

Es sei (Fig. 161.) AB eine gerade Linie, so kann von ihr nicht zugleich ein Theil in der Ebene MN, und ein anderer Theil ausserhalb dieser Ebene liegen.

Beweis.

Wenn ABC eine gerade Linie wäre, von welcher der Theil AB in der Ebene MN und der Theil BC oberhalb dieser Ebene läge, so verlängere man den in der Ebene liegenden Theil AB nach D. Hierdurch würden die zwei geraden Linien ABC und ABD sich einander in der geraden Linie AB durchschneiden, welches widersprechend ist, da zwei gerade Linien

nur in einem Puncte zusammentreffen können, wenn sie nicht ganz und gar auf einander fallen.

Der 2. Satz.

Lehrsatz.

Wenn sich zwei gerade Linie einander durchschneiden, so liegen sie in einer Ebene; auch liegt jedes Dreieck in einer Ebene.

Wenn die zwei geraden Linien (Fig. 162.) AB und CD sich einander schneiden, so liegen beide in einerlei Ebene, so wie auch jedes, aus drei geraden Linien gebildete Dreieck sich in einer Ebene befindet.

Beweis.

Man nehme auf EC den willkührlichen Punct F, auf EB den willkührlichen Punct G und ziehe die Verbindungslinien FG. und CB. Wäre nun von dem Dreiecke ECB ein Stück, wie etwa EFG, in der Ebene, und ein anderes Stück, wie FGBC, über der Ebene, so würde auch von jeder der zwei geraden Linien EB und EC ein Theil in der Ebene, und ein anderer Theil über der Ebene liegen, was widersprechend ist. (XI, 1. S.) Folglich liegt das ganze Dreieck EBC in einerlei Ebene. In dieser Ebene befinden sich auch die Linien EB und EC; folglich auch die Linien AB und CD (XI, 1. S.)

Der 3. Satz.

Lehrsatz.

Wenn zwei Ebenen einander durchschneiden, so ist ihr gemeinschaftlicher Durchschnitt eine gerade Linie.

Es sei (Fig. 163.) der gemeinschaftliche Durchschnitt der sich schneidenden Ebenen AB und BC in BD, so ist BD eine gerade Linie.

Beweis.

Wenn BD keine gerade Linie wäre, so sei es irgend eine andere, etwa BED in der Ebene AB und BFD in der Ebene

BC. Hier würden nun die zwei geraden Linien BED und BFD einen Raum BEDF einschließen, was widersprechend ist. (I, 12. Gr.) Folglich kann ausser BD keine andere gerade Linie von B nach D möglich seyn.

Der 4. Satz.

Lehrsatz.

Wenn eine gerade Linie auf zwei andern, die einander schneiden, in ihrem gemeinschaftlichen Durchschnitte senkrecht steht, so ist sie auch auf der Ebene, worin jene Linien liegen, lothrecht.

Wenn (Fig. 164.) die Linie FE sowohl mit AEB als mit DEC im Puncte E rechte Winkel bildet, so steht FE auf der Ebene, worin AB und CD liegen, senkrecht.

Beweis.

Man ziehe in der Ebene, worin AB und CD liegen, und durch ihren Durchschnittspunct E eine gerade Linie GEH, mache EA = EB, EC = ED, und ziehe AD und CB. Ferner nehme man in EF einen willkührlichen Punct F, und ziehe die Verbindungslinien FA, FG, FD, FB, FH und FC. Hier ist nun in den Dreiecken, AED und CEB die

AE = EB, ferner die
ED = EC, und endlich
$\measuredangle$ AED = $\measuredangle$ CEB (I, 15. S.) folglich ist auch
AD = BC (I, 4. S.) und
$\measuredangle$ DAE = $\measuredangle$ EBC. Es ist aber auch
$\measuredangle$ AEG = $\measuredangle$ BEH (I, 15. S.) auch
AE = EB, folglich muß auch
AG = BH und
GE = HE seyn. (I, 26. S.)

In den Dreiecken FEA und FEB ist FE lothrecht auf EA und auf EB, daher

$\measuredangle$ FEA = $\measuredangle$ FEB = R, ferner
AE = EB und
FE = FE, folglich
FA = FB (I, 4. S.) Aus gleichem Grunde ist

auch in den Dreiecken FED und FEC die Seite
FD = FC. Es war aber
AD = CB. Folglich ist
∢ FAD = ∢ FBC. (I, 8. S.) Allein
FA = FB und
AG = BH, daher ist auch
FG = FH (I, 4. S.) ferner
FE = FE und nach dem Vorigen
GE = HE, folglich auch
∢ FEG = ∢ FEH (I, 8. S.) und daher die
FE auf GEH lothrecht. (I, 10. Erkl.)

Auf gleiche Art wird bewiesen, daß FE auch mit jeder andern durch den Punct E in der Ebene der Durchschnittslinien AB und CD gezogenen einen rechten Winkel bildet. Daher muß FE auf dieser Ebene lothrecht seyn. (XI, 3. Erkl.)

Der 5. Satz.

Lehrsatz.

Wenn eine gerade Linie mit drei andern an ihrem Endpuncte, einzeln genommen, rechte Winkel bildet, so liegen diese drei gerade Linien in einer Ebene.

Wenn (Fig. 165.) auf der Linie AB die Linien BC, BD und BE senkrecht steht, so müssen BC, BD und BE in einer Ebene liegen.

Beweis.

Lägen die drei genannten Linien nicht in einer Ebene, so befinde sich BE und BD in einerlei Ebene und BC über derselben. Wird nun die durch AB und BC gehende Ebene gehörig verlängert, so schneidet sie die untere Ebene in irgend einer geraden Linie (XI, 3. S.) etwa in BF. Es befänden sich daher BE, BD und BF in der untern, und BA, BC und BF in der oberen Ebene. Es ist aber AB lothrecht auf BE und BD, folglich muß sie auch auf BF senkrecht (XI, 4. S.) und daher ABF ein rechter Winkel seyn. Allein ABC war, nach der An-

nahme, auch ein rechter Winkel; folglich wäre ∠ ABC = ∠ ABF, welches widersprechend ist. (I, 9. Gr.)

Der 6. Satz.

Lehrsatz.

Wenn zwei gerade Linien auf der nämlichen Ebene senkrecht stehen, so sind sie mit einander gleichlaufend.

Wenn (Fig. 166.) die Linie AB und die Linie CD auf der Ebene BDE senkrecht stehet, so ist AB mit CD parallel.

Beweis.

Wenn die Linie AB mit dem Puncte B und CD mit dem Puncte D in der Ebene eintrifft, so ziehe man die Verbindungslinie BD und auf BD aus D in dieser Ebene das Loth DE, nehme DE = AB, und ziehe die Verbindungslinien BE, AD und AE. Da die Linie CD auf der Ebene BDE lothrecht steht, so ist sie es auch auf DB und DE. Auf gleiche Art muß auch AB sowohl auf BD als auf BE senkrecht seyn. Daher ist in den Dreiecken ABD und DEB

∠ ABD = ∠ BDE = R, ferner
AB = DE und
BD = DB. Daher ist
AD = BE (I, 4. S.) Nun ist
AB = DE, und
AE = AE daher auch
∠ ABE = ∠ EDA (I, 8. S.) Es ist aber
∠ ABE = R, folglich auch
∠ EDA = R, und es muß

ED auf DA senkrecht seyn. Da aber die ED auch auf DB und DC lothrecht steht, so befinden sich DB, DA und DC in einerlei Ebene (XI, 5. S.) in welcher auch die Verbindungslinie AB liegt. (XI, 2. S.) Nun ist aber ∠ ABD = ∠ CDB = R; folglich muß die AB mit CD parallel seyn. (I, 28. S.)

Der 7. Satz.

Lehrsatz.

Wenn zwei gerade Linien mit einander parallel sind und auf jeder ein willkührlicher Punct genommen wird, so liegt die gerade Verbindungslinie dieser Puncte mit den Parallelen in einerlei Ebene.

Es sei (Fig. 167.) AB mit CD gleichlaufend, E ein willkührlicher Punct in jener, F ein solcher Punct in dieser, und EF die gerade Verbindungslinie von beiden, so liegt EF in der Ebene ABDC.

Beweis.

Wäre dies nicht, so falle diese Verbindungslinie über die Ebene der Parallelen, wie EGF. Legt man nun durch diese eine Ebene, von welcher die untere Ebene in einer geraden Linie EF geschnitten wird (XI, 3. S.), so würden die zwei geraden Linien EGF und EF einen Raum einschließen, was unmöglich ist. (I, 12. Gr.)

Der 8. Satz.

Lehrsatz.

Wenn zwei gerade Linien mit einander parallel sind und die eine auf einer Ebene senkrecht ist, so steht auch die andere auf dieser Ebene lothrecht.

Es sei (Fig. 168.) AB mit CD gleichlaufend und die AB stehe auf einer Ebene BDE lothrecht, so muß auch CD auf ebendieser senkrecht seyn.

Beweis.

Wenn die Parallelen AB und CD die Ebene in den Puncten B und D schneiden, so ziehe man die gerade Verbindungslinie BD, auf sie aus D in der untern Ebene das Loth DE, nehme DE = AB und ziehe EB, EA und AD, so ist BD mit AB und CD in einerlei Ebene (XI, 7. S.), worin sich auch AD befindet. (XI, 2. S.)

Da nun AB auf der untern Ebene lothrecht ist, so ist

$\measuredangle ABD = \measuredangle ABE = R$, (XI, 3. Erkl.) da aber AB mit CD parallel ist, so muß

$\measuredangle ABD + \measuredangle BDC = 2 R$ seyn (I, 29. S.) folglich ist auch

$\measuredangle BDC = R$.

Da nun in den Dreiecken ABD und DEB

$\measuredangle ABD = \measuredangle BDE = R$, ferner

$AB = DE$, und auch

$BD = BD$, so ist

$AD = BE$ (I, 4. S.) Es ist aber

$DE = AB$ und

$AE = AE$, daher auch

$\measuredangle ABE = \measuredangle EDA$ (I, 8. S.) Allein

$\measuredangle ABE = R$, folglich auch

$\measuredangle EDA = R$. Daher steht ED auf der Ebene durch DB und DA lothrecht (XI, 4. S.) und muß es daher auch auf der, in dieser Ebene liegenden Linie DC seyn (XI, 3. Erkl.) Daher ist

$\measuredangle EDC = R$. Es war aber auch

$\measuredangle BDC = R$, daher steht CD auf der Ebene durch BD und DE lothrecht (XI, 4. S.) auf welcher auch die ihr gleichlaufende AB senkrecht ist.

Der 9. Satz.

Lehrsatz.

Wenn jede von zwei gerade Linien mit einer dritten, in einer andern Ebene liegenden, einzeln genommen, parallel ist, so sind auch jene zwei Linien unter sich parallel.

Es sei (Fig. 169.) sowohl AB als CD mit EF, welche in einer andern Ebene liegt, gleichlaufend, so muß auch AB mit CD gleichlaufend seyn.

Beweis.

Man nehme in EF den willkührlichen Punct G, errichte aus ihm auf EF in der Ebene durch FE und BA das Loth GH,

und aus dem nämlichen Puncte G auf EF in der Ebene EFDC das Loth GJ, so stehet diese EF auf der Ebene durch GH und GJ lothrecht (XI, 4. S.) Da aber sowohl AB als CD mit diesem Lothe EF parallel ist, so steht auch AB und CD auf der Ebene durch GH und GJ senkrecht, und daher muß auch AB mit CD parallel seyn (XI, 6. S.)

Der 10. Satz.

Lehrsatz.

Wenn zwei gerade Linien, welche einen Winkel bilden, zweien andern, ebenfalls einen Winkel bildenden, aber nicht in der nämlichen Ebene liegenden, einzeln genommen, parallel sind, so sind die beiden Winkel einander gleich.

Wenn (Fig. 170.) BA mit ED, BC mit EF gleichlaufend ist, und der Winkel ABC ausserhalb der Ebene des Winkels DEF sich befindet, so ist ∢ ABC = ∢ DEF.

Beweis.

Man nehme BA = ED, BC = EF, und ziehe die Verbindungslinien AD, BE, CF, AC und DF. Da hier die BA der ED gleich und parallel ist, so muß auch AD der BE gleich und parallel seyn. (I, 33. S.) Auf gleiche Weise ist auch CF eben dieser BE gleich und parallel. Daher sind auch die Linien AD und CF einander gleich und parallel (XI, 9. S) und daher auch AC = DF. Daher haben die beiden Dreiecke ABC und DEF drei Seiten, einzeln genommen, mit einander gemein, und es ist ∢ ABC = ∢ DEF (I, 8. S.)

Der 11. Satz.

Aufgabe.

Von einem ausserhalb einer gegebenen Ebene befindlichen Puncte ein Loth auf sie zu errichten.

Es sei (Fig. 171.) A der ausserhalb einer Ebene gegebene Punct, aus welchem auf diese Ebene ein Loth zu ziehen ist.

Auflösung.

Man nehme in der gegebenen Ebene eine willkührliche gerade Linie BC, ziehe aus A auf sie das Loth AD (I, 12. S.) welches auf der gegebenen Ebene entweder senkrecht steht oder nicht. Wäre jenes, so ist die Aufgabe aufgelöset. Im letzten Falle aber errichte man aus D auf BC in der Ebene, worin sie liegt, ein willkührliches Loth DE, (I, 11. S.) und ziehe von A auf diese DE wiederum das Loth AF. (I, 12. S.)

Beweis.

Zieht man durch den Punct F die GH mit BC gleichlaufend, so ist, da BC auf DA und DE senkrecht steht, diese BC auf der Ebene ADE (XI, 4. S.) und folglich auch die mit ihr parallele GH auf dieser Ebene lothrecht. (XI, 8. S.) Daher ist GH auf FA oder, was einerlei ist, AF auf GH senkrecht (XI, 3. Erkl.) Es ist aber auch AF auf DE senkrecht, folglich muß diese AF auf der Ebene durch GH und DE, das heißt, auf der gegebenen Ebene lothrecht seyn. (XI, 4. S.)

Der 12. Satz.

Aufgabe.

Aus einem in einer Ebene gegebenen Puncte ein Loth auf sie zu errichten.

Es sei (Fig. 172.) A der in der Ebene MN gegebene Punct, aus welchem auf sie das Loth zu errichten ist.

Auflösung.

Man nehme einen Punct B ausserhalb der Ebene, und ziehe von diesem auf diese Ebene das Loth BC (XI, 11. S.) und sodann durch A mit CB die AD gleichlaufend. (I, 31. S.)

Beweis.

Da die beiden Linien DA und BC mit einander parallel sind, und BC auf der Ebene MN lothrecht steht, so muß auch DA auf dieser Ebene lothrecht seyn. (XI, 8. S.)

Der 13. Satz.

Lehrsatz.

Aus einem, in einer Ebene gegebenen Puncte können nicht zwei Lothe nach einerlei Seite hin auf diese Ebene errichtet werden.

Wenn A (Fig. 173.) der in der Ebene DE gegebene Punct ist, so können durch ihn nicht zwei Lothe nach einerlei Seite dieser Ebene errichtet werden.

Beweis.

Wenn AB und AC zwei Lothe auf der Ebene DE wären, so lege man durch BAC eine Ebene, welche die Ebene DE in der geraden Linie DAE schneidet. (XI, 3. S.) Hier wäre nun

$\sphericalangle$ DAB = R und ebenso

$\sphericalangle$ DAC = R (XI, 3. Erkl.) folglich auch

$\sphericalangle$ DAB = $\sphericalangle$ DAC, welches widersprechend ist (I, 9. Gr.)

Der 14. Satz.

Lehrsatz.

Wenn eine gerade Linie auf zwei Ebenen lothrecht steht, so sind diese Ebenen mit einander gleichlaufend.

Es sei (Fig. 174.) die Linie AB sowohl auf der Ebene CD, als auf der Ebene EF senkrecht, so muß CD mit EF gleichlaufend seyn.

Beweis.

Wären beide Ebenen nicht mit einander parallel, so müßten sie, hinlänglich verlängert, einmal zusammentreffen, und sich in einer geraden Linie GH durchschneiden. (XI, 3. S.) In dieser nehme man den willkührlichen Punct K und ziehe in der verlängerten Ebene DC die gerade Linie KA, und in der verlängerten Ebene EF die gerade Linie KB. Da nun die Linie AB auf beiden Ebenen lothrecht steht, so muß sie es auch auf KA und auf KB seyn. (XI, 3. Erkl.) Es befände sich daher

im Dreiecke AKB bei A und B ein rechter Winkel, welches widersprechend ist. (I, 17. S.)

Der 15. Satz

Lehrsatz.

Wenn zwei in einer Ebene zusammentreffende gerade Linien zweien in einer anderen Ebene liegenden, ebenfalls zusammentreffenden geraden Linien, einzeln genommen, parallel sind, so sind auch die beiden Ebenen mit einander gleichlaufend.

Es seien (Fig. 175.) AB und BC die in der einen, DE und EF die in der anderen Ebene liegenden Linien. Auch sei BA mit ED und BC mit EF gleichlaufend, so muß die Ebene durch ABC mit der Ebene durch DEF parallel seyn.

Beweis.

Es sei durch AB und BC die Ebene AC und durch DE und EF die Ebene DF gelegt. Aus B ziehe man auf die Ebene DF das Loth BG (XI, 11. S.) und ziehe in dieser Ebene durch G die GH mit ED und die GJ mit EF gleichlaufend (I, 31. S.) Da nun BA und GH, welche, einzeln genommen, mit ED parallel sind, auch unter sich parallel seyn müssen (XI, 9. S.) so befindet sich BG mit ihnen in einerlei Ebene (XI, 7. S.) Nun ist aber ∡ BGH = R (XI, 3. Erkl.), daher auch

∡ GBA = R (I, 29. S.)

Ebenso wird erwiesen, daß auch ∡ GBC = R; folglich muß GB auf der Ebene AC lothrecht seyn (XI, 4. S.) Es war aber GB auch auf der Ebene DF senkrecht, folglich sind die beiden Ebenen AC und DF mit einander parallel. (XI, 14. S.)

Der 16. Satz.

Lehrsatz.

Wenn zwei parallele Ebenen von einer dritten Ebene geschnitten werden, so sind die Durchschnittslinien ebenfalls parallel.

Es sei (Fig. 176.) die Ebene AB mit der Ebene CD parallel und beide werden von der dritten Ebene FHGE geschnitten, so sind die Durchschnittslinien FE und HG ebenfalls parallel.

Beweis.

Wenn diese Linien EF und GH nicht mit einander parallel wären, so müßten sie, über F und H verlängert, irgendwo zusammentreffen. Gesetzt dieß geschehe in J, so befände sich die gerade Linie EFJ in der Ebene AB (XI, 1. S.) und die gerade Linie GHJ in der Ebene CD und der Durchschnittspunct J läge sowohl in der Ebene AB, als auch in der Ebene CD. Daher träfen auch diese parallelen Ebenen AB und CD einmal zusammen, welches unmöglich ist. (XI, 8. Erkl.)

Der 17. Satz.

Lehrsatz.

Wenn zwei gerade Linien von drei parallelen Ebenen geschnitten werden, so bilden die Theile dieser Linien eine Proportion.

Es werden (Fig. 177.) die geraden Linien AB und CD von den parallelen Ebenen GH, JK und LM geschnitten, so bilden die Theile derselben gleiche Verhältnisse.

Beweis.

Man ziehe die Verbindungslinien AC, BD und AD, welche letztere die Ebene JK im Puncte N schneidet. Ferner ziehe man die Linien EN und FN.

Da die Ebenen JK und LM mit einander parallel sind, und von der Ebene EBDN geschnitten werden, so sind auch die Durchschnittslinien EN und BD parallel (XI, 16. S.) Aus gleichem Grunde ist aber auch die Linie NF mit AC gleichlaufend. Daher hat man im Dreiecke ABD

AE : EB = AN : ND (VI, 2. S.)

und im Dreiecke ADC

CF : FD = AN : ND. Folglich ist auch

AE : EB = CF : FD.

Der 18. Satz.

Lehrsatz.

Wenn eine gerade Linie auf einer Ebene senkrecht ist, so sind alle Ebenen, welche man durch diese gerade Linien legt, auf dieser Ebene senkrecht.

Es sei die Linie AB (Fig. 178.) auf der Ebene CE lothrecht, so wird auch jede andere, durch AB gehende Ebene auf ihr senkrecht seyn.

Beweis.

Man lege durch die lothrechte Linie AB eine willkührliche Ebene DE, welche die untere Ebene in der geraden Linie CE schneidet (XI, 3. S.) Errichtet man nun auf CE in dieser Ebene DE aus irgend einem willkührlichen Puncte F die FG lothrecht, so ist der Winkel GFB ein Rechter. Da aber AB auf der untern Ebene lothrecht steht, so ist auch der Winkel ABF ein Rechter (XI, 3. Erkl.) Daher müssen die Linien AB und GF mit einander gleichlaufend seyn. (I, 28. S.) Daher muß ferner auch GF auf der untern Ebene senkrecht seyn (XI, 8. S.) und folglich auch die Ebene DE. (XI, 4. Erkl.)

Der 19. Satz.

Lehrsatz.

Wenn jede von zwei, sich schneidenden Ebenen auf einer dritten Ebene senkrecht steht, so ist auch ihre Durchschnittslinie auf dieser Ebene lothrecht.

Wenn die zwei sich in BD (Fig. 179.) schneidenden Ebenen AB und BC auf der untern Ebene VW lothrecht sind, so muß auch BD auf ihr senkrecht seyn.

Beweis.

Wäre die Durchschnittslinie BD nicht auf der untern Ebene lothrecht, und folglich auch nicht auf den Durchschnittslinien DA und DC, so errichte man in D auf AD in der Ebene AB das Loth DE und auf CD aus D in der Ebene BC das Loth DF. Da nun die Ebenen AB und BC auf der

untern Ebene senkrecht sind, so wären auch die Linien DE und DF auf dieser Ebene lothrecht (XI, 4. Erkl.) welches widersprechend ist. (XI, 13. S.)

Der 20. Satz.

Lehrsatz.

Wenn ein körperlicher Winkel von drei ebenen Winkeln begrenzt ist, so sind jede zwei dieser Winkel zusammengenommen größer, als der dritte.

Es sei der körperliche Winkel bei A (Fig. 180.) von den drei ebenen Winkeln BAC, CAD und DAB begränzt, so ist

$$\measuredangle BAC + \measuredangle CAD > \measuredangle DAB$$
$$\measuredangle CAD + \measuredangle DAB > \measuredangle BAC \text{ und}$$
$$\measuredangle DAB + \measuredangle BAC > \measuredangle CAD.$$

Beweis.

Wenn jeder dieser drei ebenen Winkel dem andern gleich ist, so bedarf der Satz keines Beweises. Sind sie aber ungleich, so sei der Winkel BAC größer, und es ist zu beweisen, daß $\measuredangle BAD + \measuredangle DAC > \measuredangle BAC$. Man mache

$\measuredangle BAE = \measuredangle BAD$ (I, 23. S.) ferner

AE = AD und ziehe die Verbindungslinien BEC, CD und BD, so ist in den Dreiecken DAB und BAE

DB = BE (I, 4. S.) Es ist aber in dem Dreiecke DBC (nach I, 20. S.)

$BD + DC > BC$, daher ist auch

$DC > EC$ (I, 5. Gr.); folglich

$\measuredangle DAC > \measuredangle CAE$ (I, 25. S.) und daher

$\measuredangle BAD + \measuredangle DAC > \measuredangle BAC$.

Der 21. Satz.

Lehrsatz.

Jeder körperliche Winkel wird von ebenen Winkeln begrenzt, welche zusammengenommen weniger, als vier Rechte betragen.

Es sei (Fig. 181.) der körperliche Winkel bei A von den ebenen Winkeln BAC, CAD und DAB eingeschlossen, so ist

$$\sphericalangle BAC + \sphericalangle CAD + \sphericalangle DAB < 4\ R.$$

Beweis.

Man nehme auf den Linien AB, AC und AD die willkührlichen Puncte B, C und D und ziehe die Verbindungslinien BC, CD und DB, so ist bei dem körperlichen Winkel B, welcher von den drei ebenen Winkeln CBA, ABD und DBC eingeschlossen wird,

$$\sphericalangle CBA + \sphericalangle ABD > \sphericalangle DBC \quad (XI,\ 20.\ S.)$$

Aus gleichem Grunde ist bei dem körperlichen Winkel D

$\sphericalangle BDA + \sphericalangle ADC > \sphericalangle BDC$ und bei dem körperlichen Winkel C

$$\sphericalangle DCA + \sphericalangle ACB > \sphericalangle BCD.$$

Es ist aber in dem Dreiecke DBC

$$\sphericalangle DBC + \sphericalangle BDC + \sphericalangle BCD = 2\ R \quad (I,\ 32.\ S.)$$

folglich ist auch

$$\sphericalangle CBA + \sphericalangle ABD + \sphericalangle BDA + \sphericalangle ADC + \sphericalangle DCA + \sphericalangle ACB < 2R.$$

Es sind aber diese sechs Winkel, nebst den drei Winkeln BAC, CAD und DAB, zusammen so groß, als sechs rechte Winkel, folglich ist

$$\sphericalangle BAC + \sphericalangle CAD + \sphericalangle DAB < 4\ R.$$

Der 22. Satz.

Lehrsatz.

Wenn drei ebene Winkel, wovon jede zwei zusammen größer als der dritte sind, gleiche Schenkel haben und die Endpuncte dieser Schenkel durch gerade Linien verbunden werden, so kann aus diesen geraden Linien ein Dreieck gebildet werden.

Es seien (Fig. 182.) die drei ebenen Winkel ABC, DEF und GHJ gegeben, wovon jede zwei zusammen größer, als der dritte ist und BA = BC = HG = HJ = ED = EF, so kann man aus den Verbindungslinien AC, GJ und DF ein Dreieck bilden.

Beweis.

Dieses Dreieck wird man bilden können, wenn von den drei geraden Linien je zwei zusammen genommen größer, als die dritte sind (I, 22. S.) Wäre nun $\sphericalangle ABC = \sphericalangle DEF = \sphericalangle GHJ$, so müßte auch $AC = DF = GJ$ seyn. (I, 4. S.) und es wären offenbar je zwei dieser Linien zusammengenommen größer, als die dritte.

Sind aber diese Winkel einander ungleich, so nehme man nach Willkühr zwei derselben, etwa $\sphericalangle ABC$ und $\sphericalangle GHJ$, mache $\sphericalangle JHK = \sphericalangle ABC$ (I, 23. S.) auch $HK = HG$ und ziehe GK und JK, so ist in den Dreiecken ABC und JHK die $AC = JK$ (I, 4. S.) Nun ist aber, weil

$\sphericalangle GHJ + \sphericalangle ABC > \sphericalangle DEF$ (I, 24. S.) oder

$\sphericalangle GHK > \sphericalangle DEF$, auch

$GK > DF$, aber

$GJ + JK > GK$, folglich auch

$GJ + JK > DF$ (I, 20. S.) allein

$JK = AC$, daher auch

$GJ + AC > DF$.

Auf gleiche Art wird bewiesen, daß $AC + DF > GJ$ und $GJ + DF > AC$. Folglich sind von den drei geraden Linien AC, DF und GJ je zwei zusammen größer, als die dritte.

Der 23. Satz.

Aufgabe.

Aus drei ebenen Winkeln, welche zusammen kleiner als vier Rechte, und wovon je zwei zusammen größer, als der dritte sind, einen körperlichen Winkel zu bilden.

Es seien (Fig. 184.) ABC, DEF und GHJ die drei ebenen Winkel, welche die angegebene Eigenschaft haben, so soll aus ihnen ein körperlicher Winkel gebildet werden.

Lehnsatz.

Wenn zwei gerade Linien (Fig. 183.) AB und KN gegeben sind, und es ist $AB > KN$, so soll eine dritte NQ

gefunden werden, daß Quadr. AB = Quadr. KN + Quadr. NQ sei. Man beschreibe über AB einen Halbkreis, trage aus A die AC = NK in denselben und ziehe CB.

Da hier ∢ ACB = R (III, 31. S.) so ist auch

Quadr. AB = Quadr. AC + Quadr. CB (I, 45. S.)

Nimmt man nun NQ = CB, so ist

Quadr. AB = Quadr. KN + Quadr. NQ.

Auflösung.

Man mache die Schenkel der drei gegebenen Winkel (Fig. 184.) ABC, DEF und GHJ einander gleich, und ziehe die Verbindungslinien AC, DF, GJ, aus welchen ein Dreieck gebildet werden kann (XI, 22. S.) Man beschreibe mit ihnen das Dreieck KLM, worin AC = KL, DF = LM, und GJ = MK ist, beschreibe ferner um dieses Dreieck KLM einen Kreis, (IV, 5. S.) so ist sein Mittelpunct N entweder innerhalb dieses Dreiecks, oder auf einer seiner Seiten, oder ausserhalb des Dreiecks.

I. Es sei des Kreises Mittelpunct N in der Seite LM des Dreiecks LKM. Man ziehe KN, so ist AB > KN. Man errichte aus dem Puncte N auf die Ebene des Kreises die gerade Linie NQ lothrecht (XI, 12. S.), mache NQ so groß, daß Quadr. AB = Quadr. KN + Quadr. NQ (Lehns.) und ziehe die Linien QK, QL und QM, so ist bei Q der zu bildende körperliche Winkel.

Hier ist zu beweisen,

Erstens, daß AB > KN oder daß

AB nicht = KN und

AB nicht < KN seyn könne. Wäre

AB = KN, so wäre auch, weil

AB = BC, und KN = LN = NM, auch

AB + BC = LM, folglich, weil

AB = BC = DE = EF, und

LM = DF, nunmehr auch

DE + EF = DF, was nicht seyn kann. (I, 20. S.)

Wäre aber AB < KN, so müßte aus gleichem Grunde DE + EF < DF seyn, welches ebenfalls nicht möglich ist.

Zweitens, daß bei Q der verlangte körperliche Winkel sei, oder daß die drei ebenen Winkel KQL, LQM und MQK, welche den körperlichen Winkel Q begrenzen, den gegebenen Winkeln ABC, DEF und GHJ einzeln genommen, gleich seien.

Da QN lothrecht auf dem Kreise steht, und folglich auch auf den Linien NL, NK und NM, (XI, 3. Erkl.) so ist in den Dreiecken QNL und QNK, die Seite QL = QK (I, 4. S.) und in den Dreiecken QNL und QNM die QL = QM (I, 4. S.) Daher ist auch QM = QK und daher QK = QL = QM. Weil aber ∡ QNK = R, so ist (I, 47. S.) Quadr. QK = Q. KN + Q. NQ. Es war aber Quadr. AB = Q. KN + Q. NQ; daher ist Quadr. AB = Q. QK, und somit AB = QK. Daher sind die Schenkel der gegebenen Winkel, und die drei Linien welche den körperlichen Winkel Q einschließen, unter sich gleich.

Es ist aber auch

AC = KL, DF = LM, und GJ = MK; daher auch

∡ ABC = ∡ KQL, ∡ DEF = ∡ LQM, und

∡ GHJ = ∡ MQK. (I, 8. S.)

II. Es sei (Fig. 185.) der Mittelpunct des Kreises N innerhalb des Dreiecks KLM. Man ziehe KN, LN und MN, und verfahre im übrigen, wie bei dem ersten Falle, so wird auf die nämliche Art bewiesen, daß Q der verlangte körperliche Winkel ist, und es bleibt nur noch zu zeigen, daß AB > KN, oder daß AB nicht = KN, oder AB < KN seyn könne.

Wäre AB = KN, so wäre auch BC = NL; es ist aber AC = KL, folglich wäre ∡ ABC = ∡ KNL (I, 8. S.) Ebenso wird bewiesen, daß ∡ DEF = ∡ LNM, und ∡ GHJ = ∡ MNK wäre.

Daher wären die drei gegebenen Winkel, welche zusammen kleiner, als vier Rechte seyn müssen, so groß, als die drei Winkel bei N, welche zusammen vier Rechte betragen.

Wäre AB < KN, so nehme man
NO = AB, NP = BC, und ziehe OP, so ist, weil AB = BC, auch NO = NP. Aber NK = NL, daher OK = PL und LK mit OP gleichlaufend (VI, 2. S.), woraus
NK : NO = KL : OP folgt (VI, 4. S.) Es ist aber
NK > NO, daher auch KL, das ist
AC > OP. Es ist daher in den Dreiecken ABC und ONP, welche gleiche Schenkel haben, worin aber AC > OP, auch ∢ ABC > ∢ ONP (I, 24. S.)

Ebenso wird bewiesen, daß ∢ DEF > ∢ LNM und ∢ GHJ > ∢ MNK, und es wären die drei gegebenen Winkel, welche zusammen kleiner, als vier Rechte seyn müssen, größer, als die drei Winkel bei N, welche zusammen vier Rechte betragen.

III. Es liege des Kreises Mittelpunct N (Fig. 186.) ausserhalb des Dreiecks KLM. Man ziehe KN, LN und MN, und verfahre im Uebrigen, wie im ersten Falle, so wird wie dort bewiesen, daß sich bei Q der verlangte körperliche Winkel befindet, und es bleibt noch zu zeigen, daß auch hier AB > KN, oder daß AB nicht = KN, noch AB < KN sei.

Wäre AB = KN, so wäre auch BC = LN.

Allein AC = KL; folglich wäre ∢ ABC = ∢ LNK (I, 8. S.) Ebenso wird bewiesen, daß
∢ GHJ = ∢ KNM und ∢ DEF = ∢ LNM. Daher wäre
∢ ABC + ∢ GHJ = ∢ LNK + ∢ KNM = ∢ LNM = ∢ DEF, da doch von den gegebenen Winkeln je zwei zusammen größer, als der dritte seyn müssen.

Wäre AB < KN, so mache man AB = NO = NP = NR und ziehe PO und OR. Hier sind, wie im zweiten Falle, PO und LK, so wie auch OR und KM gleichlaufend, folglich ∢ POR = ∢ LKM (I, 29. S.) auch ist, wie im zweiten Falle, ∢ ABC > ∢ ONP und ∢ GHJ > ∢ ONR.
Man nehme daher ∢ ONS = ∢ ABC und
∢ ONT = ∢ GHJ, folglich
∢ SNT = ∢ ABC + ∢ GHJ, und mache
AB = NS = NT und ziehe TO, OS und ST.

Hier ist $OS = AC = KL$ (I, 4. S.) und $OT = GJ = KM$. Es ist aber $\measuredangle POR$ oder $\measuredangle LKM > \measuredangle SOT$, daher auch LM oder $DF > ST$. (I, 25. S.)

Nun ist $NS = NT = AB$, und daher auch

$NS = DE = EF$, folglich ist

$\measuredangle DEF > \measuredangle SNT$ (I, 25. S.) oder

$\measuredangle DEF > \measuredangle ABC + \measuredangle GHJ$, welches gegen die Annahme $\measuredangle ABC + \measuredangle GHJ > \measuredangle DEF$ streitet.

Der 24. Satz.

Lehrsatz.

Wenn ein Körper von parallelen Ebenen eingeschlossen ist, so sind seine gegenüberliegenden Seitenflächen gleiche Parallelogramme.

Es werde (Fig. 187.) der Körper ABHGDCFE (wofür in der Folge der Kürze wegen Körper BE, oder Körper DH wird gesetzt werden) von parallelen Ebenen eingeschlossen, so sind die einander gegenüberstehenden Seitenflächen gleiche Parallelogramme.

Beweis.

I. Die Ebene ABCD (wofür in der Folge kürzer Ebene AC gesetzt wird) schneidet die parallelen Ebenen BG und CE, so wie auch die parallelen Ebenen BF und AE. Daher sind im ersten Falle die Durchschnittslinien AB und DC, im zweiten Falle aber die Durchschnittslinien AD und BC mit einander parallel. Daher muß die Seitenfläche AC ein Parallelogramm seyn. Auf ähnliche Art wird dieses von allen übrigen Seitenflächen bewiesen.

II. Wenn man in zwei einander gegenüberliegenden Ebenen BG und CE die homologen Diagonalen AH und DF zieht,

so ist $BG = 2 \triangle ABH$ (I, 34. S.) und ebenso

$CE = 2 \triangle DCF$. Nun sind aber die Linien AB und DC, sowie auch BH und CF einander gleich und parallel (I, 34. S.) und daher auch

∢ ABH = ∢ DCF (XI, 10. S.) folglich ist

△ ABH ≅ △ DCF (I, 4. S.) Daher

BG = CE (I, 6. Gr.) Eben dieses gilt auf gleiche Art von allen übrigen sich entgegenliegenden Seitenflächen.

Ein Körper, wie der so eben betrachtete, heiße ein Parallelopipedum.

Der 25. Satz.

Lehrsatz.

Wenn ein Parallelopipedum durch eine Ebene geschnitten wird, welche zweien seiner gegenüberliegenden Seitenflächen parallel ist, so verhalten sich die beiden hiedurch entstehenden Körper, wie ihre Grundflächen zu einander.

Es werde (Fig. 188.) das Parallelopipedum AD von der Ebene EF parallel mit den gegenüberliegenden Seitenflächen AH und LD geschnitten, so verhalten sich die hiedurch entstehenden Körper AK und JD wie ihre Grundflächen AE und JC.

Beweis.

Man verlängere die Linie AL über L und A, mache LP = PQ = JL und AN = NO = JA, und vollende sowohl die Parallelogramme AR, RO, CP, YQ, als auch die Körper NH, OV, LX, PZ.

Hier ist JA = AN = NO, folglich auch

EA = AR = RO (I, 36. S.) und

EH = HR = RS, und ferner

AH = NV = OS (XI, 24. S.)

Es sind aber in den drei Körpern KA, AV und VO den so ebengenannten Ebenen eines jeden die ihnen gegenüberliegenden gleich (XI, 24. S.) folglich ist auch

KA = AV = VO (XI, 10. Erkl.)

Eben dieses kann aus gleichen Gründen von den drei Körpern JD, DP und PJ bewiesen werden, und es ist

JD = DP = PJ. Folglich ist OE von AE das

ebenso Vielfache, als es OK von AK ist; so wie auch EQ von JC das ebenso Vielfache ist, als KQ von JD, d. h. OE und OK sind von AE und AK, so wie auch EQ und KQ von JC und JD gleich Vielfache. Es ist daher, wenn

OE = EQ, auch OK = KQ. Ferner wenn

OE > EQ, auch OK > KQ und wenn

OE < EQ, auch OK < KQ, daher ist

AE : JC = AK : JD.

Der 26. Satz.

Aufgabe.

An einen gegebenen Punct einer gegebenen geraden Linie einen körperlichen Winkel zu legen, welcher einem gegebenen gleich ist.

Es sei (Fig. 189.) BA die gegebene gerade Linie, und es soll an dem Puncte A ein körperlicher Winkel gebildet werden, welcher dem gegebenen körperlichen Winkel bei D gleich ist.

Auflösung.

Der gegebene körperliche Winkel D sei von den ebenen Winkeln CDE, EDF und FDC eingeschlossen. Man ziehe von einem in DF willkührlich gewählten Puncte F auf die Ebene durch CD und DE das Loth FG und die Verbindungslinie DG, mache ∡ BAK = ∡ EDC und

∡ BAJ = ∡ EDG (I, 23. S.) so ist auch

∡ KAJ = ∡ CDG (I, 10. Gr.) Nun mache man AJ = DG, und errichte auf der Ebene durch KA und AB im Puncte J die JH lothrecht, nehme JH = GF und ziehe AH, so ist der körperliche Winkel bei A, der von den ebenen Winkeln KAB, BAH und HAK begrenzt wird, dem gegebenen Winkel D gleich.

Beweis.

Man mache AB = DE, AK = DC, und ziehe die Linien BJ, JK, KB, BH und HK, ferner die Linien EG, GC, CE, EF und FC, so müssen die Linien FG und HJ, weil sie auf den Ebenen lothrecht stehen, auch auf jenen Linien senkrecht

seyn, welche in diesen Ebenen aus G und J gezogen sind. (XI, 3. Erkl.)

Nun ist in den Dreiecken BAJ und EDG

$\angle$ BAJ = $\angle$ EDG auch
BA = ED und
AJ = DG, folglich
BJ = EG (I, 4. S.) ferner ist
JH = GF, ferner
$\angle$ BJH = $\angle$ EGF = R, daher auch
BH = EF (I, 4. S.) Ferner ist in den

Dreiecken AJH und DGF

$\angle$ AJH = $\angle$ DGF = R, ferner
AJ = DG und
JH = GF auch
AH = DF (I, 4. S.) Es war aber
AB = DE, folglich ist auch
$\angle$ BAH = $\angle$ EDF (I, 8. S.)

Da nun auch in den Dreiecken AJK und DGC die Winkel bei A und D nebst den sie einschließenden Seiten einander gleich sind, so ist JK = GC (I, 4. S.) Es ist aber auch

JH = GF, und
$\angle$ HJK = $\angle$ FGC = R, folglich
HK = FC (I, 4. S.) Es war aber auch
AH = DF und
AK = DC, daher ist (I, 8. S.)
$\angle$ HAK = $\angle$ FDC. Ferner war aber auch
$\angle$ BAH = $\angle$ EDF, und
$\angle$ KAB = $\angle$ CDE, folglich muß der körperliche

Winkel bei A jenem bei D gleich seyn. (XI, 10. Erkl.)

Der 27. Satz.

Aufgabe.

Auf einer gegebenen geraden Linie ein Parallelopipedum zu errichten, welches einem gegebenen Parallelopipedum ähnlich sei, und ähnlich liege.

Es sei (Fig. 190.) AB die gegebene gerade Linie, CD das gegebene Parallelopipedum, und man soll auf AB ein Parallelopipedum beschreiben, welches dem gegebenen CD ähnlich ist;

Auflösung.

Man lege an AB in A einen körperlichen Winkel, (XI, 26. S.) welcher dem körperlichen Winkel bei C gleich ist; so, daß $\measuredangle$ BAH = $\measuredangle$ ECF, ferner
$\measuredangle$ BAJ = $\measuredangle$ ECG, und
$\measuredangle$ HAJ = $\measuredangle$ FCG ist. Nun mache man
EC : CG = BA : AJ und
CG : CF = AJ : AH (VI, 12. S.) so ist auch
EC : CF = BA : AH. Nun vollende man sowohl das Parallelogramm BJ, als das Parallelopipedum AK.

Beweis.

Da hier $\measuredangle$ BAJ = $\measuredangle$ ECG, und die diese Winkel bildenden Seiten einander proportional sind, so ist das Parallelogramm BJ dem Parallelogramme EG ähnlich, (VI, 4. S.) und aus gleichem Grunde auch JH $\sim$ GF und HB $\sim$ FE. Nun sind in den beiden Körpern AK und CD den hier genannten Ebenen eines jeden die ihnen gegenüberliegenden Ebenen gleich und ähnlich. (XI, 24. S.) Folglich ist auch der Körper AK dem Körper CD ähnlich. (XI, 10. Erkl.)

Der 28. Satz.

Lehrsatz.

Wenn ein Parallelopipedum von einer Ebene durch die Diagonale zweier gegenüberliegenden Seitenflächen durchschnitten wird, so wird es hierdurch halbirt.

Es werde (Fig. 191.) das Parallelopipedum AB von einer Ebene durch die Diagonalen CF und DE durchschnitten, so ist es hierdurch halbirt.

Beweis.

Da hier $\triangle$ CGF $\cong$ $\triangle$ CBF (I, 34. S.) und $\triangle$ DAE $\cong$ $\triangle$ DHE, und da ferner die Parallelogramme CA und BE

(XI, 24. S.) und GE und CH einander gleich sind, ferner die Durchschnittsebene CFED beiden Körpern gemein ist, so muß auch das Prisma CGFDAE dem Prisma CFBDEH gleich seyn. (XI, 10. Erkl.)

Der 29. Satz.

Lehrsatz.

Parallelopipeden auf einerlei Grundfläche und von gleicher Höhe, deren Seitenlinien sich in einerlei geraden Linie endigen, sind einander gleich.

Wenn (Fig. 192.) die Parallelopipeden AH und AJ, welche einerlei Grundfläche AB und gleiche Höhe haben, und deren Seitenlinien AF, AG, KL, LM, und CD, CE, BH, BJ sich in einerlei geraden Linien FM und DJ endigen, sind einander gleich.

Beweis.

Da hier CB = DH = EJ (I, 34. S.) so ist auch
DE = HJ und weil auch
DC = HB und
EC = JB, so hat man
△ DEC = △ HJB (I, 8. S.) Aus gleichem Grunde ist auch △ FGA = △ LMK. Es ist aber
FE = LJ (I, 36. S.) ferner
AD = KH (XI, 24. S.) und
AE = KJ. Daher ist das Prisma EFAC dem Prisma JLKB gleich. (XI, 10. Erkl.) Wenn man daher jedem dieser Prismen den Körper ABHG beifügt, so ist das Parallelopipedum AH dem Parallelopipedum AJ gleich.

Der 30. Satz.

Lehrsatz.

Parallelopipeden von einerlei Grundflächen und Höhen, deren Seitenlinien sich nicht in einerlei geraden Linien endigen, sind einander gleich.

Es seien (Fig. 193.) die Parallelopipeden CM und CL auf der nämlichen Grundfläche AB und von gleicher Höhe und ihre Seitenlinien AF und AG, CD und CE, KL und KM, BH und BJ liegen nicht in einerlei geraden Linien, so ist das Parallelopipedum CM dem Parallelopipedum CL gleich.

Beweis.

Man verlängere die Linien EG und JM über G und M, desgleichen die Linien FL und DH über L und H bis sie in den Puncten N, O und Q zusammentreffen, und ziehe die Verbindungslinien NA, OK, PC und QB, so entsteht ein drittes Parallelopipedum ABQN, welches sowohl mit dem ersten ABDL, als mit dem zweiten ABEM einerlei Grundfläche AB und einerlei Höhe hat, und dessen Seitenlinien sich mit jenen der beiden ersten in einerlei geraden Linien befinden; nämlich bei dem dritten und ersten in FO und DQ, bei dem dritten und zweiten in NE und OJ. Folglich ist

ABDL = ABQN (XI, 29. S.) und ferner
ABEM = ABQN, folglich auch
ABDL = ABEM. (I, 1. Gr.)

Der 31. Satz.

Lehrsatz.

Wenn Parallelopipeden gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben, so sind sie einander gleich.

Es seien (Fig. 194.) ABEG und CDFN zwei Parallelopipeden, welche gleiche Grundflächen, AB und CD, und auch gleiche Höhen haben, so sind sie einander gleich.

Beweis. Erster Fall.

Wenn die Seitenlinien AG und BE, CN und DF auf den Grundflächen AB und CD lothrecht sind. Hier sind die Winkel AKB und CQD entweder einander gleich oder ungleich.

I. Wenn diese Winkel ungleich sind, so sei ∡ AKB $<$ ∡ CQD. Man verlängere CQ nach S, und mache ∡ SQT = ∡ AKB (I, 23. S.) ferner QS = KA, und QT = KB.

Man vollende das Parallelogramm TS und das Parallelopipedum TSZM. Man verlängere DQ und XT bis sie in a zusammentreffen und ziehe durch S die Sd mit DA parallel. Auch verlängere man OD und dS bis sie in c zusammentreffen, und vollende die Parallelopipeden aSZb und QceR, so ist TS = aS (I, 35. S.) und TSZM = aSZb (XI, 29. S.) weil beide einerlei Grundfläche QZ und einerlei Endungslinien bY und aX haben.

Da nun KA = QS, ferner
KB = QT, und
$\angle$ AKB = $\angle$ SQT, so ist
AB ≌ TS. (VI, 1. Erkl.)

Ebenso ist, weil die durch die Lothe KL und QR bestimmten Höhen einander gleich sind, auch BL ≌ RT und
AL ≌ RS. Daher muß
auch ABEG = TSZM = aSZb seyn.
(XI, 24. S. und 10. Erkl.)

Da ferner AB = TS = aS und
AB = CD, so ist auch
CD = aS und folglich
CD : DS = aS : DS.

Da Ce durch die Parallel-Ebene FQ geschnitten wird, so ist CDFN : QceR = CD : DS = aS : DS (XI, 25. S.) Aus gleichem Grunde ist auch, da ae durch die Parallel-Ebene QZ geschnitten wird
aSZb : QceR = aS : DS, folglich ist
CDFN : QceR = aSZb : QceR, und daher muß
CDFN = aSZb = ABEG seyn.

II. Wenn aber $\angle$ AKB = $\angle$ CQD ist, so seien CQ und DQ so verlängert, daß QS = KA und
Qa = KB ist. Hier ist nun
$\angle$ SQa = $\angle$ CQD = $\angle$ AKB (I, 15. S.)
Daher wird wie zuvor bewiesen, daß
ABEG = aSZb (XI, 10. Erkl.) desgleichen, daß CDFN = aSZb (XI, 25. S.) und folglich, daß ABEG = CDFN sei. (I, 1. Gr.)

Zweiter Fall.

Wenn die Seitenlinien (Fig. 195.) AG und BE, CN und DF nicht senkrecht auf den Grundflächen AB und CD stehen.

Hier fälle man von den Puncten G, M, K und E; desgleichen von N, Q, S und F auf die Grundflächen AB und CD Lothe, und vollende die senkrechten Parallelopipeden KX und SZ. Da diese nun gleiche Grundflächen EG und FN, auch gleiche Höhen haben, so sind sie nach dem ersten Falle einander gleich.

Es ist aber KX = ABEG (XI, 29. S.) und
SZ = CDFN, folglich auch
ABEG = CDFN. (I, 1. Gr.)

Der 32. Satz.

Lehrsatz.

Wenn Parallelopipeden gleiche Höhe haben, so verhalten sie sich wie ihre Grundflächen.

Wenn (Fig. 196.) die zwei Parallelopipeden AB und CD einerlei Höhe haben, so verhalten sie sich wie ihre Grundfläche AE und CF.

Beweis.

Man lege an die Linie GF das Parallelogramm FH = AE (I, 45. S.) und vollende das Parallelopipedum GJ, so ist GJ = AB (XI, 31. S.) Weil aber CJ von der Ebene GD geschnitten wird, welche mit zwei Seitenflächen des Parallelopipedums CJ parallel ist, so verhält sich GJ : CD = FH : CF (XI, 25. S.) daher ist auch AB : CD = AE : CF.

Der 33. Satz.

Lehrsatz.

Aehnliche Parallelopiden stehen im dreifach höheren Verhältnisse ihrer homologen Seiten.

Es seien (Fig. 197.) die Parallelopipeden AB und CD einander ähnlich, so verhält sich jener Körper zu diesem, wie $(AE : CF)^3$

Beweis.

Man verlängere die Linien AE, GE und HE, mache EJ = CF, EK = FM und EL = FQ. Ferner vollende man das Parallelogramm KJ, und die Körper OJ und KP; ebenso auch das Parallelogramm GJ, und den Körper EN.

Da nun CD $\backsim$ AB, so ist auch

$\angle$ MFC = $\angle$ GEA (XI, 9. Erkl. und VI, 1. Erkl.)

Auch ist $\angle$ MFC = $\angle$ GEA = $\angle$ KEJ (I, 15. S.) Nun ist CF = EJ und FM = EK, folglich ist

CM $\cong$ JK. (VI, 1. Erkl.)

Ebenso wird bewiesen, daß auch

QC $\cong$ JL und DF $\cong$ EO. Daher ist auch

CD $\cong$ OJ (XI, 24. S. und 10. Erkl.)

Da nun AB $\backsim$ CD $\backsim$ OJ, so ist auch

AE : EJ = GE : EK = HE : EL (XI, 9. Erkl. und VI, 1. Erkl.) ferner ist

AE : EJ = AG : GJ = AB : EN und

GE : EK = GJ : JK = EN : KP. Endlich

HE : EL = HJ : JL = KP : OJ (VI, 1. S. und XI, 32. S.) Daher ist nun auch

AB : EN = EN : KP = KP : OJ, und daher

$AB : OJ = (AB : EN)^3 = (AE : EJ)^3$. Nun war aber OJ = CD und EJ = CF, folglich ist

$AB : CD = (AE : CF)^3$

Zusatz.

Hieraus geht hervor: daß, wenn vier gerade Linien proportional sind, die erste sich zur vierten verhält, wie das Parallelopipedum über der ersten zu dem ihm ähnlichen und ähnlich liegenden Parallelopipedum über der zweiten, weil die erste Linie zur vierten ein dreifach höheres Verhältniß hat, als die erste zur zweiten.

Der 34. Satz.

Lehrsatz.

Wenn zwei Parallelopipeden einander gleich sind, so stehen ihre Grundflächen im umgekehrten

Verhältnisse ihrer Höhen, und wenn die Grundflächen zweier Parallelopipeden im umgekehrten Verhältnisse ihrer Höhen stehen, so sind diese Körper einander gleich.

Es seien (Fig. 198.) die zwei Parallelopipeden AB und CD einander gleich, so sind ihre Grundflächen AK und CO im umgekehrten Verhältnisse ihrer Höhen, und wenn diese Grundflächen AK und CO im umgekehrten Verhältnisse ihrer Höhen stehen, so ist AB = CD.

Beweis. Erster Fall.

Wenn die Seitenlinien AG und KB, CL und OD auf den Grundflächen AK und CO lothrecht stehen, so sind AG und CL die Höhen der beiden Parallelopipeden, und es ist zu beweisen.

I. Wenn AB = CD, daß nun AK : CO = CL : AG. Nun sind aber diese Grundflächen AK und CO entweder gleich oder ungleich. Wenn AK = CO ist, so muß, wegen
AB = CD, auch CL = AG seyn
(XI, 31. S.) und es ist offenbar AK : CO = CL : AG.

Sind aber die Grundflächen ungleich, und etwa
AK > CO, so ist, weil
AB = CD, auch
CL > AG (XI, 31. S.) Nimmt man daher
CR = AG, und vollendet den Körper CS, so ist,
wegen AB = CD, auch
AB : CS = CD : CS.
Nun ist aber
AB : CS = AK : CO, (XI, 32. S.) und
CD : CS = CQ : PR (XI, 25. S.) = CL : CR
(VI, 1. S.) Daher muß auch
AK : CO = CL : CR seyn. Es ist aber
CR = AG, folglich auch
AK : CO = CL : AG.

II. Wenn AK : CO = CL : AG, nun auch AB = CD sei. Hier sind, wie zuvor, die Grundflächen AK und CO entweder gleich oder ungleich. Ist AK = CO, so ist auch

CL = AG und daher

AB = CD. (XI, 31. S.)

Ist aber AK > CO, so muß auch

CL > AG seyn. Man mache daher

CR = AG und vollende den Körper CS, so ist

AK : CO = CL : CR. Es ist aber

AK : CO = AB : CS, (XI, 32. S.) und

CL : CR = CQ : PR (VI, 1. S.) = CD : CS (XI, 25. S.) Daher ist

AB : CS = CD : CS und folglich auch

AB = CD.

Zweiter Fall.

Wenn (Fig. 199.) die Seitenlinien AG und KB, ferner CL und OD auf den Grundflächen AK und CO nicht senkrecht sind, so ziehe man von den Puncten G, F, B und J, desgleichen von L, N, D und Q die Lothe auf die Grundflächen und vollende die senkrechten Parallelopipeden TB und aD. Daher ist TG die Höhe der beiden Körper TB und AB (VI, 4. Erkl.) so wie auch aL die Höhe der beiden Körper aD und CD ist.

Nun muß bewiesen werden

I. Wenn AB = CD ist, daß alsdann auch

AK : CO = aL : TG sei. Da hier

AB = TB (XI, 29. S.) und ferner

CD = aD (XI, 30. S.) so ist, weil

AB = CD, auch TB = aD, folglich, nach dem ersten Falle, TS : aZ = aL : TG. Nun ist aber

TS = AK und aZ = CO (XI, 24. S.) folglich muß auch AK : CO = aL : TG seyn.

II. Wenn aber AK : CO = aL : TG, daß nun

AB = CD sei.

Da hier AK = TS (XI, 24. S.) und auch

CO = aZ, so ist

TS : aZ = aL : TG und folglich, nach dem ersten Falle, TB = aD. Nun ist aber

TB = AB (XI, 29. S.) und

aD = CD (XI, 30. S.) folglich

muß AB = CD seyn.

Der 35. Satz.

Lehrsatz.

Wenn man aus den Scheitelpuncten zweier gegebenen ebenen gleichen Winkel auf ihre Ebenen zwei gerade Linien aufstellt, welche mit den Schenkeln der gegebenen Winkel, einzeln genommen, gleiche Winkel bilden; wenn man ferner in diesen aufgestellten Linien zwei willkührliche Puncte nimmt, aus diesen auf die zuerst gegebenen Winkel-Ebenen zwei Lothe zieht, und von den Puncten, worin diese Lothe in den Ebenen eintreffen, nach den Scheitelpuncten der zuerst gegebenen Winkel zwei gerade Linien zieht, so bilden diese mit den aufgestellten Linien gleiche Winkel.

Es seien (Fig. 200.) BAC und EDF die zwei gegebenen Winkel, aus deren Scheitelpuncten A und D die Linien AG und DL so über die Winkel-Ebenen aufgestellt sind, daß ∡ BAG = ∡ EDL und ∡ GAC = ∡ LDF, ferner seien G und L die willkührlichen Puncte, GK und LM die aus ihnen auf die Winkel-Ebenen gezogenen Lothe, und KA und MD die Verbindungslinien, so ist ∡ KAG = ∡ MDL.

Beweis.

Man nehme AH = DL, und ziehe durch H mit dem Lothe GK, die HJ gleichlaufend, welche demnach auf der Ebene BAC (XI, 8. S.) folglich auch auf den Linien JA, JB, JC lothrecht steht (XI, 3. Erkl.) Von J und M fälle man auf die Schenkel der gegebenen Winkel die Lothe JB, JC und ME, MF, und ziehe endlich die Verbindungslinien BC, CH, HB und EF, FL, LE.

Da HJ auf JA, ferner die JC auf AC und die HJ auf JC lothrecht ist, so hat man

Quadr. AH = Quadr. AJ + Quadr. JH (I, 47. S.)
Quadr. AJ = Quadr. AC + Quadr. CJ und
Quadr. CJ + Quadr. JH = Quadr. HC. Daher ist
Quadr. HA = Quadr. AC + Quadr. HC und folglich

∢ HCA = R (I, 48. S.) Auf gleiche Art ist auch
∢ LFD = R, folglich
∢ HAC = ∢ LFD. Es ist aber auch
∢ AHC = ∢ LDF und
AH = DL, folglich
AC = DF (I, 26. S.)

Da nun eben so die HJ auf JA, die JB auf BA, und die HJ auf JB senkrecht steht, so wird auf gleiche Art bewiesen, daß ∢ HBA = ∢ LED = R, und AB = DE ist.

Da nun die Winkel BAC und EDF nebst den sie bildenden Seiten einander gleich sind, so ist BC = EF (I, 4. S.)
und ∢ BCA = ∢ EFD.

Nun ist aber ∢ JCA = ∢ MFD = R, folglich auch
∢ BCJ = ∢ EFM (I, 3. Gr.) Aus gleichem Grunde ist ∢ JBC = ∢ MEF. Es war aber
BC = EF, folglich ist
CJ = FM (I, 26. S.) Nun war
AC = DF, und
∢ JCA = ∢ MFD, folglich ist
AJ = DM (I, 4. S.) und daher
Quadr. AJ = Quadr. DM.

Da HJ lothrecht auf JA und LM lothrecht auf MD ist, so hat man Quadr. HA = Quadr. AJ + Qdr. JH (I, 47. S.)
und Quadr. LD = Quadr. DM + Quadr. ML. Es war
aber HA = LD, daher ist
Quadr. HA = Quadr. LD, folglich auch
Quadr. AJ + Qdr. JH = Qdr. DM + Qdr. ML
Allein Quadr. AJ = Quadr. DM, folglich ist
Quadr. JH = Quadr. ML (I, 3. Gr.) und daher
JH = ML. Es war aber auch
AJ = DM und
AH = DL, folglich ist
∢ KAH = ∢ MDL (I, 8. S.)

Zusatz.

Hierdurch ist bewiesen: Wenn man aus den Scheitelpuncten zweier gleichen ebenen Winkel zwei gleiche gerade Linien so

aufstellt, daß die Winkel, welche sie mit den Schenkeln der zuerst gegebenen Winkel bilden, einzeln genommen, einander gleich sind, so müssen auch die, von den Endpuncten der aufgestellten Linien auf die zuerst gegebenen Winkel-Ebenen gefällten Lothe einander gleich seyn.

Der 36. Satz.

Lehrsatz.

Wenn drei gerade Linien proportional sind, so ist das Parallelopipedum, welches aus allen dreien gebildet werden kann, dem gleichseitigen und mit jenem gleichwinkeligen Parallelopipedum aus der mittleren Linie gleich.

Es sei (Fig. 201.) A : B = B : C, so ist das aus den Linien A, B und C gebildete Parallelopipedum dem aus der Linie B gebildeten gleichseitigen, und mit dem ersteren gleichwinkeligen Parallelopipedum gleich.

Beweis.

Es sei E ein körperlicher Winkel, welcher von den drei ebenen Winkeln DEG, GEF und FED begrenzt ist. Man mache B = DE = GE = FE und vollende das Parallelopipedum EJ; dann ziehe man KL, lege an K einen körperlichen Winkel, welcher jenem bei E gleich ist, und von den drei ebenen Winkeln MKN, NKL und LKM begrenzt wird. Man nehme ferner A = KL,

B = KN und

C = KM und vollende das Parallelopipedum KH.

Da hier A : B = B : C ist, so ist auch

KL : FE = ED : KM. Da ferner

∢ LKM = ∢ FED, so ist das Parallelogramm ML dem Parallelogramme DF gleich. (VI, 14. S.) Nun sind auf den gleichen Winkeln MKL und DEF in K und E die gleichen Linien KN und EG so aufgestellt, daß

∢ LKN = ∢ FEG und

∢ MKN = ∢ DEG.

Daher müssen die von N und G auf die Ebenen ML und DF gefällten Lothe, d. h. die Höhen (VI, 4. Erkl.) der beiden Körper einander gleich seyn. (XI, 35. Zus.) Es ist aber ferner ML = DF, folglich müssen auch die beiden Körper KH und EJ einander gleich seyn. (XI, 31. S.)

Der 37. Satz.

Lehrsatz.

Wenn vier gerade Linien proportional sind, so sind auch die auf denselben beschriebenen ähnlichen, und ähnlich liegenden Parallelopipeden einander proportional. Und wenn die auf vier geraden Linien beschriebenen ähnlichen und ähnlich liegenden Parallelopipeden proportional sind, so müssen es auch diese vier geraden Linien seyn.

Es sei (Fig. 202.) AB : CD = EF : GH, und AJ, CK, EL und GM die auf ihnen beschriebenen ähnlichen und ähnlich liegenden Parallelopipeden, so ist auch AJ : CK = EL : GM. Und wenn umgekehrt AJ : CK = EL : GM ist, so hat man auch AB : CD = EF : GH.

Beweis.

I. Wenn AB : CD = EF : GH, so ist auch
$(AB : CD)^3 = (EF : GH)^3$. Nun ist aber
$AJ : CK = (AB : CD)^3$ (XI, 33. Zus.) und
$EL : GM = (EF : GH)^3$, folglich ist auch
AJ : CK = EL : GM.

II. Wenn aber AJ : CK = EL : GM ist, so wird, weil
$AJ : CK = (AB : CD)^3$ und
$EL : GM = (EF : GH)^3$ (XI, 33. Zus.) auch
$(AB : CD)^3 = (EF : GH)^3$ nunmehr
AB : CD = EF : GH.

Der 38. Satz.

Lehrsatz.

Wenn auf einer Ebene eine andere lothrecht steht, und von einem Puncte der ersten auf die andere ein Loth gefällt wird, so muß dieses in der Durchschnittslinie beider Ebenen eintreffen.

Wenn (Fig. 203.) auf der Ebene AB die Ebene CD senkrecht ist, und von einem Puncte E in CD ein Loth EG auf AB gefällt wird, so muß dieses in AD eintreffen.

Beweis.

Wenn das vom Puncte E in der Ebene CD auf die Ebene AB gefällte Loth nicht in AD einträfe, sondern ausserhalb derselben, wie EF, so ziehe man aus F die FG senkrecht auf AD, und die Verbindungslinie EG. Hier ist FG auf der Ebene CD lothrecht (XI, 4. Erkl.) und daher auch lothrecht auf der Linie GE (XI, 3. Erkl.) Wenn nun EF auf der Ebene AB, und somit auch auf der Linie FG senkrecht wäre (XI, 3. Erkl.), so hätte man ein Dreieck EGF, worin $\sphericalangle$ EGF = $\sphericalangle$ EFG = R wäre, welches unmöglich ist. (I, 7. S.)

Der 39. Satz.

Lehrsatz.

Wenn ein Parallelopipedum durch die Mitte zweier einander gegenüberliegenden Ebenen von zweien Ebenen geschnitten wird, so wird die Durchschnittslinie dieser letzteren die Diagonale des Parallelopipedums halbiren.

Es werde (Fig. 204.) das Parallelopipdum AF durch die Mitte T und R der zwei gegenüberliegenden Ebenen CF und AH von zwei Ebenen JM und NQ geschnitten, so wird die Durchschnittslinie TR die Diagonale DG in S halbiren.

Beweis.

Man ziehe die Linien DT, TE, BR, RG. Da die Parallelen DC und FE von NO geschnitten werden, so ist

$\measuredangle$ DNT = $\measuredangle$ TOE (I, 29. S.) Nun ist auch
DN = EO, und
NT = TO, daher auch
DT = TE (I, 4. S.) und
$\measuredangle$ NTD = $\measuredangle$ OTE (I, 4. S.), daher
DTE eine gerade Linie. (I, 14. S.)

Auf gleiche Art wird bewiesen, daß BR = RG und BRG eine gerade Linie ist.

Da nun sowohl DB, als EG der Linie CA gleich und parallel sind, so sind auch DB und EG gleich und parallel. (I, 1. Gr. und XI, 9. S.) folglich auch DE und BG gleich und parallel. (I, 33. S.) Daher auch TR und DG in einer Ebene (XI, 7. S.) und schneiden einander in S.

Da nun DE und BG einander gleich und parallel sind, auch
DT = TE und
BR = RG, so ist auch
DT = RG und
$\measuredangle$ DTS = $\measuredangle$ SGR (I, 29. S.) Es sind aber auch die Winkel bei S einander gleich (I, 15. S.) folglich ist TS = SR und DS = SG. (I, 26. S.)

Der 40. Satz.

Lehrsatz.

Wenn zwei Prismen gleiche Höhen haben, und das eine von ihnen ein Parallelogramm, das andere aber ein Dreieck zur Grundfläche hat; so, daß das Parallelogramm noch einmal so groß, als das Dreieck ist, so sind beide Prismen einander gleich.

Es seien (Fig. 205.) ED und HGJLKM zwei Prismen von gleicher Höhe, die Grundfläche des ersten sei das Parallelogramm ACFE, jene des andern das Dreieck HGJ, und es sei ACFE = 2 $\triangle$ GHJ, so sind die zwei Prismen einander gleich.

Beweis.

Man vollende die Parallelopipeden ED und GO. Da nun hier ACFE = 2 △ HGJ und auch

HVJG = 2 △ HGJ (I, 34. S.) so ist

ACFE = HVJG. Da aber auch die beiden Körper einerlei Höhe haben, so ist ED = OG (XI, 31. S.) Weil nun die obenbemerkten Prismen von diesen Parallelopipeden die Hälften sind, so müssen auch jene Prismen einander gleich seyn. (I, 7. Gr.)

Ende des eilften Buchs.

Das
zwölfte Buch
der
Elemente des Euclides.

Dieses Buch handelt:

1) Von den Pyramiden und Prismen. Satz 1 — 9.
2) Von dem Kegel und Cylinder. Satz 10 — 15.
3) Von der Kugel. Satz 16 — 18.

Der 1. Satz.

Lehrsatz.

Wenn in Kreisen ähnliche Vielecke beschrieben sind, so verhalten sich diese wie die Quadrate der Durchmesser von jenen.

Es seien in die Kreise (Fig. 206.) AEDCB und FKJHG die ähnlichen Vielecke ABCDE und FGHJK beschrieben, so verhält sich jenes zu diesem, wie sich das Quadrat des Durchmessers BL zum Quadrate des Durchmessers GM verhält.

Beweis.

Man ziehe die geraden Linien BE und GK, AL und FM. Da die beiden Vielecke einander ähnlich sind, so ist auch

∠ BAE = ∠ GFK (VI, 1. Erkl.) und daher

BA : AE = GF : FK. Daher auch in den Dreiecken BAE und GFK

∠ AEB = ∠ FKG (VI, 6. Erkl.) Es ist aber

∠ AEB = ∠ ALB und

∠ FKG = ∠ FMG (III, 21. S.) folglich

∠ ALB = ∠ FMG. Es ist ferner

∠ BAL = ∠ GFM = R (III, 31. S.) folglich △ BAL ∼ △ GFM und daher

BL : GM = AB : FG (VI, 4. S.) folglich

$(BL : GM)^2 = (AB : FG)^2$. Nun ist aber

$(BL : GM)^2$ = Qdr. BL : Qdr. GM (VI, 20. S.)

und $(AB : FG)^2$ = ABCDE : FGHJK. Daher

ABCDE : FGHJK = Quadr. BL : Quadr. GM.

Der 2. Satz.

Lehrsatz.

Kreise verhalten sich zu einander, wie die Quadrate ihrer Durchmesser.

Wenn (Fig. 207.) ABCD und EFGH die gegebenen Kreise sind, so verhält sich jener zu diesem, wie das Quadrat des Durchmessers BD zum Quadrate des Durchmessers FH.

Beweis.

Wäre nicht Q. BD : Q. FH = Kr. ABCD : Kr. EFGH, so sei Q. BD : Q. FH = Kr. ABCD : R, so muß die Fläche R entweder größer oder kleiner, als der Kreis EFGH seyn.

Erster Fall.

Es sei Q. BD : Q. FH = Kr. ABCD : R; so, daß

R < Kr. EFGH oder daß

Kr. EFGH = R + X sei.

Man schreibe in den Kreis EFGH das Quadrat EFGH, welches aus den beiden gleichen Dreiecken EFH und HGF besteht, und der Hälfte jenes Quadrates gleich ist, welches um den Kreis beschrieben werden kann (I, 41. S.), wenn man durch die Puncte E, F, G und H Tangenten zieht. Da nun das äussere Quadrat größer, als der Kreis ist, so muß seine Hälfte, folglich auch das innere Quadrat, größer, als die Hälfte des Kreises seyn.

Werden nun die Bogen EF, FG, GH und HE in den Puncten J, K, L und M halbirt, und die geraden Linien EJ, JF, FK, KG, GL, LH, HM und ME gezogen, so ist jedes der hierdurch entstehenden Dreiecke, wie etwa das Dreieck JFE, größer, als die Hälfte seines Segmentes FJE. Denn wenn man durch J eine Tangente zieht und das Parallelogramm EF vollendet, so ist dasselbe größer, als das Segment FJE, folglich seine Hälfte, das ist das Dreieck JFE, größer, als die Hälfte des Segmentes. (I, 41. S.)

Da nun eben dieses von allen Dreiecken gilt, welche entstehen, wenn man mit den Halbirungen der Bogen fortfährt, und folglich auf diese Weise vom Kreise EFGH mehr, als die Hälfte weggenommen wird, und vom Reste wieder mehr, als die Hälfte und so immer fort, so bleiben zuletzt Segmente wie EJ, JF, FK u. s. w. übrig, welche zusammengenommen kleiner sind, als jede willkührlich angenommene Fläche X. (X, 1. S.) Es war aber Kr. EFGH = R + X. Folglich

ist das Vieleck EJFKGLHM > R.

Nun beschreibe man in den Kreis ABDC ein dem vorigen ähnliches Vieleck ANBOCPDQ, so ist

Quadr. BD : Quadr. FH = Viel. ANB.... : Viel. EJF.... (XII, 1. S.)

Es ist aber nach der Annahme

Quadr. BD : Quadr. FH = Kr. ABCD : R, folglich

Kr. ABCD : R = Viel. ANB.... : Viel. EJF....

Da nun offenbar

Kr. ABCD > Viel. ANB.... ist, so müßte auch Fläche R > Viel. EJF.... seyn, welches dem vorher Bewiesenen, daß

Viel. EJF... > R widerspricht.

Es ist daher unmöglich, daß die Proportion

Quadr. BD : Quadr. FH = Kr. ABCD : R statt finden kann, wenn R < Kr. EFGH ist.

Allein aus eben diesen Gründen ist es auch unmöglich, daß Quadr. FH : Quadr. BD = Kr. EFGH : Z sei, wenn Z < Kr. ABCD ist.

Zweiter Fall.

Es sei nun

Quadr. BD : Quadr. FH = Kr. ABCD : R; so, daß R > Kr. EFGH ist. Für diesen Fall ist auch

Quadr. FH : Quadr. BD = R : Kr. ABCD. Nun mache man R : Kr. ABCD = Kr. EFGH : Z so, daß, weil R > Kr. EFGH, nun auch Kr. ABCD > Z ist. Daher wäre

Quadr. FH : Quadr. BD = Kr. EFGH : Z, welches aber, weil Z < Kr. ABCD ist, nach dem ersten Falle unmöglich ist.

Der 3. Satz.

Lehrsatz.

Jede dreiseitige Pyramide kann in zwei gleiche, einander selbst und der ganzen ähnliche Pyramiden und in zwei gleiche Prismen getheilt werden,

welche zusammengenommen **größer**, **als die Hälfte** der ganzen Pyramide sind.

Es sei (Fig. 208.) ABCD die gegebene dreieckige Pyramide, so kann dieselbe auf die in dem Lehrsatze angegebene Art getheilt werden.

Beweis.

Man halbire die Linien AB, BC und CA in den Puncten E, F und G, ferner die Linien DA, DB und DC in den Puncten H, J und K, und ziehe HE, EG und GH für die Pyramide AEGH und HJ, JK, KH für die Pyramide HJKD; ferner JF, FG für die beiden Prismen EBFGHJ und GFCHJK.

I. Da die beiden Pyramiden AEGH und HJKD von gleichvielen, unter sich gleich und ähnlichen Seitenflächen begrenzt werden, so sind sie ebenfalls einander gleich und ähnlich. (XI, 10. Erkl.) denn

1) Da AE = EB und AH = HD, so ist die Linie EH mit BD gleichlaufend (VI, 2. S.) Weil ferner AH = HD und BJ = JD, so ist auch HJ mit AB parallel. (VI, 2. S.) Daher muß HEBJ ein Parallelogramm seyn, und es ist

HJ = EB = AE (I, 34. S.) so wie auch

$\angle$ JHD = $\angle$ BAH (I, 29. S.) Es war aber auch

HD = AH, folglich ist

$\triangle$ DJH $\cong$ $\triangle$ HEA (I, 4. S. u. VI, 4. S.)

2) Ganz auf gleiche Art wird bewiesen, daß

$\triangle$ DHK $\cong$ $\triangle$ HGA und

KD = GH sei.

3) Da die Linien DJ und HE so wie auch DK und HG einander gleich und parallel sind, so ist auch

$\angle$ JDK = $\angle$ EHG (XI, 10. S.) folglich

$\triangle$ DJK $\cong$ $\triangle$ HEG. (I, 4. S. u. VI, 4. S.)

4) Ebenso wird bewiesen, daß

$\triangle$ HJK $\cong$ $\triangle$ AEG ist.

II. Nun ist die ganze Pyramide ABCD der Pyramide HJKD ähnlich (XI, 9. Erkl.) und daher muß sie auch der Pyramide AEGH ähnlich seyn.

Denn da HJ mit AB gleichlaufend ist, so sind die Dreiecke DAB und DHJ gleichwinkelig (I, 29. S.) und ihre Seiten proportional (VI, 4. S.). Daher sind beide Dreiecke einander ähnlich (VI, 1. Erkl.), welches auch von den Dreiecken DAC und DHK, so wie von den Dreiecken DBC und DJK gilt.

Allein es ist auch, weil HJ mit AB und HK mit AC parallel und folglich $\measuredangle$ BAC = $\measuredangle$ JHK ist, (XI, 10. S.) das Dreieck ABC dem Dreiecke HJK ähnlich und folglich

BA : JH = AD : DH = AC : KH (VI, 4. S.)

III. Auch muß das Prisma, bei welchem der Grundfläche EBFG die Linie HJ gegenüberliegt, dem Prisma, bei welchem dem Dreiecke FGC als Grundfläche das Dreieck JKH gegenüberliegt, deswegen gleich seyn, weil sie einerlei Höhe haben, und wegen BF = FC auch EBFG = 2 $\triangle$ GFC ist. (XI, 40. S. und I, 41. S.)

IV. Die beiden so eben genannten Prismen müssen zusammengenommen größer, als die Hälfte der ganzen Pyramide ABCD seyn, wenn sie größer sind, als die beiden kleinen Pyramiden AEGH und HJKD zusammengenommen.

Wenn man die Linien JE und EF für die Pyramide EBFJ zieht, so wird auf eben diese Art, wie im ersten Theile bewiesen wurde, daß AEGH $\backsimeq$ HJKD, nunmehr auch dargethan,

daß EBFJ $\backsimeq$ HJKD. Daher ist auch
EBFJ $\backsimeq$ AEGH. Es ist aber offenbar
EBFGHJ > EBFJ, folglich auch
EBFGHJ > AEGH, daher auch
GFCHJK > HJKD.

Der 4. Satz.

Lehrsatz.

Wenn zwei dreieckige Pyramiden gleiche Höhen haben und es wird jede derselben in zwei gleiche, einander selbst und der ganzen ähnliche Pyramiden und in zwei gleiche Prismen getheilt; hierauf jede der hierdurch entstehenden Pyramiden wieder auf

eben diese Art, und dieses immer so fort, so verhalten sich alle Prismen in der einen Pyramide zu allen Prismen von gleicher Anzahl in der andern, wie die Grundfläche der einen zur Grundfläche der andern.

Wenn (Fig. 209.) die zwei dreieckigen Pyramiden ABCG und DEFH auf die in dem Lehrsatze bemerkte Art getheilt werden, so verhalten sich alle, durch diese Theilung in der ersten Pyramide entstehende Prismen zu allen, auf ähnliche Art in der zweiten entstehenden, wie sich die Grundfläche ABC zur Grundfläche DEF verhält.

Beweis.

Da die beiden Pyramiden ABCG und DEFH einerlei Höhe haben, so sind die von G auf das Seitendreieck ABC und von H auf das Seitendreieck DEF gefällten Lothe einander gleich. (VI, 4. Erkl.) Nun wird sowohl das Loth aus G, als auch die Linie GC von den zwei Parallel-Ebenen ABC und OLM proportional geschnitten. (XI, 17. S.) Da aber die Linie GC in M halbirt ist, so muß auch das vorhin bemerkte Loth von der Ebene OLM halbirt werden. Es leuchtet von selbst ein, daß eben dieses auch von dem Lothe gilt, welches von H auf die Ebene DEF gezogen ist. Da nun diese ganzen Lothe einander gleich sind, so müssen es auch ihre Hälften seyn. Daher haben die zwei Prismen KNCOLM und QVFRTS einerlei Höhe und müssen sich daher zu einander verhalten, wie ihre Grundflächen KNC und QVF. (XI, 28. und 32. S.) Da nun BN = NC und AK = KC, so ist auch die Linie KN mit AB parallel (VI, 2. S.) und folglich △ ABC ∾ △ KNC. (VI, 4. S.)

Ganz aus gleichem Grunde ist auch

△ DEF ∾ △ QVF. Weil aber

BC = 2 NC und EF = 2 VF, und daher

BC : EF = NC : VF ist, so hat man auch

△ ABC : △ DEF = △ KNC : △ QVF. (VI, 22. S.)

Es war aber nach dem Obigen

△ KNC : △ QVF = Prm. KNCOLM : Prm. QVFRTS.

Folglich ist auch

$\triangle$ ABC : $\triangle$ DEF = Prisma KNCOLM : Prisma QVFRTS oder

$\triangle$ ABC : $\triangle$ DEF = Prisma JBNKOL : Prisma PEVQRT (XII, 3. S.) Daher ist auch

$\triangle$ ABC : $\triangle$ DEF = Prm. KNCOLM + Prm. JBNKOL : Prm. QVFRTS + Prim. PEVQRT.

Wenn nun die in den größern Pyramiden entstandenen kleinern, wie AJKO und DPQR wieder ebenso getheilt werden, so müssen sich aus gleichem Grunde die zwei Prismen in AJKO zu den beiden Prismen in DPQR verhalten, wie sich das Dreieck AJK zum Dreiecke DPQ d. h. wie sich das Dreieck ABC zum Dreiecke DEF verhält. Daher müssen sich auch die vier Prismen in ABCG zu den vier Prismen in DEFH verhalten, wie sich das Dreieck ABC zum Dreiecke DEF verhält.

Da nun auf vollkommengleiche Art der Beweis auch von den Prismen in den Pyramiden OLMG und RTSH, und überhaupt von allen andern Prismen geführt werden kann, welche aus den immer weiter fortgesetzten Eintheilungen entstehen, so ist der Lehrsatz bewiesen.

Der 5. Satz.

Lehrsatz.

Wenn dreieckige Pyramiden einerlei Höhen haben, so verhalten sie sich wie ihre Grundflächen zu einander.

Wenn (Fig. 209.) die dreieckigen Pyramiden ABCG und DEFH einerlei Höhe haben, so verhalten sie sich, wie ihre Grundflächen ABC und DEF.

Beweis.

Wenn die Proportion

$\triangle$ ABC : $\triangle$ DFF = Pyr. ABCG : Pyr. DEFH nicht stattfände, so sei

$\triangle$ ABC : $\triangle$ DEF = Pyr. ABCG : X, so muß der Körper X entweder größer oder kleiner seyn, als die Pyramide DEFH.

I. Es sei $\triangle ABC : \triangle DEF = $ Pyr. $ABCG : X$; so, daß $X <$ Pyr. $DEFH$ oder daß Pyr. $DEFH = X + R$ ist.

Wenn man (nach XII, 3. S.) die Pyramide DEFH in ihre Pyramiden und Prismen, und die hierdurch entstehenden kleineren Pyramiden wiederum auf eben diese Art eintheilt, und auf diese Weise immer fortfährt, so bekömmt man einmal Pyramiden, welche kleiner sind, als jede Größe R (X, 1. S.) Nun war Pyr. $DEFH = X + R$, folglich sind die Prismen der Pyramide $DEFH > X$.

Wird nun die andere Pyramide ABCG auf eben diese Art und ebenso oft getheilt, so verhalten sich die Prismen der Pyramide ABCG zu den Prismen der Pyramide DEFH, wie sich das Dreieck ABC zum Dreiecke DEF, d. h. nach der Annahme, wie sich Pyramide ABCG zu X verhält. Da aber die Prismen der Pyramide ABCG offenbar kleiner sind, als diese Pyramide ABCG, so müssen auch die Prismen der Pyramide DEFH kleiner als X seyn, welches dem Vorherbewiesenen, daß die Prismen der Pyramide DEFH größer als X sind, widerspricht.

Daher ist es nicht möglich, daß $\triangle ABC : \triangle DEF = $ Pyr. $ABCG : X$ sei, weil $X <$ Pyr. DEFH. Aus gleichen Gründen ist es aber auch unmöglich, daß $\triangle DEF : \triangle ABC = $ Pyr. $DEFH : Z$, wenn $Z <$ Pyr. ABCG ist.

II. Es sei nun $\triangle ABC : \triangle DEF = $ Pyr. $ABCG : X$; so, daß $X >$ Pyr. DEFH wäre. Hier wäre auch $\triangle DEF : \triangle ABC = X : $ Pyr. ABCG.

Nun mache man $X : $ Pyr. $ABCG = $ Pyr. $DEFH : Z$; so, daß, weil $X >$ Pyr. DEFH, auch Pyr. $ABCG > Z$, folglich $Z <$ Pyr. ABCG wäre. Daher hätte man $\triangle DEF : \triangle ABC = $ Pyr. $DEFH : Z$, welches aber, weil $Z <$ Pyr. ABCG, nach dem ersten Falle unmöglich ist.

Der 6. Satz.

Lehrsatz.

Wenn vieleckige Pyramiden gleiche Höhen haben, so verhalten sie sich wie ihre Grundflächen.

Wenn (Fig. 210.) die Pyramiden ABCDEL und FGHJKM einerlei Höhe haben, so verhalten sie sich wie ihre Grundflächen ABCDE und FGHJK.

Beweis.

Man theile die Grundflächen ABCDE und FGHJK in ihre Dreiecke ABC, ACD und ADE; ferner in FGH, FHJ und FJK, und denke sich über diesen Dreiecken solche Pyramiden, welche mit den erstern von gleicher Höhe sind.

Da nun hier

△ ABC : △ ACD = Pyr. ABCL : Pyr. ACDL (XII, 5. S.), so ist
ABCD : ACD = ABCDL : ACDL. Es ist aber
ACD : ADE = ACDL : ADEL (XII, 5. S.), folglich auch
ABCD : ADE = ABCDL : ADEL. Daher
ABCDE : ADE = ABCDEL : ADEL. Nun ist
ADE : FJK = ADEL : FJKM. (XII, 5. S.) Daher
ABCDE : FJK = ABCDEL : FJKM.

Es wird aber wie zuvor bewiesen, daß
FGHJK : FJK = FGHJKM : FJKM, folglich ist auch
ABCDE : FGHJK = ABCDEL : FGHJKM.

Der 7. Satz.

Lehrsatz.

Jedes dreieckige Prisma kann in drei dreieckige Pyramiden getheilt werden, welche einander gleich sind.

Wenn (Fig. 211.) FEDCBA das gegebene dreieckige Prisma ist, so kann dasselbe in drei unter sich gleiche dreieckige Pyramiden getheilt werden.

Beweis.

Man ziehe in dem Parallelogramme EDAB die Diagonale DB, im Parallelogramme EFCB die Diagonale EC und in dem Parallelogramme FDAC die Diagonale DC, so entstehen drei dreieckige Pyramiden ABDC, DBEC und ECFD.

Da in dem Parallelogramme ABED

△ ABD = △ DBE (I, 14. S.) so muß auch

Pyr. ABDC = Pyr. DBEC seyn, weil beide ihre gemeinschaftliche Spitze in C haben. (XII, 5. S.)

Im Parallelogramme BCFE ist ebenso

△ FEC = △ CEB (I, 14. S.) und folglich

Pyr. FECD = Pyr. CEBD, weil beide die gemeinschaftliche Spitze in D haben. (XII, 5. S.)

Es war aber vorhin

Pyr. ABDC = Pyr. DBEC, folglich sind diese drei Pyramiden unter sich gleich.

Zusatz.

Hieraus folgt, daß jede Pyramide der dritte Theil eines Prisma's sei, welches mit ihr Grundfläche und Höhe gemein hat. Wenn das Prisma ein vieleckiges wäre, so kann es in dreieckige zertheilt werden, und es hat wieder der vorige Beweis Statt.

Der 8. Satz.

Lehrsatz.

Aehnliche dreieckige Pyramiden stehen in dem dreifach höhern Verhältnisse ihrer homologen Seiten.

Es seien (Fig. 212.) ABCG und DEFH zwei ähnliche dreieckige Pyramiden, so stehen sie im dreifach höhern Verhältnisse ihrer homologen Seiten BC und EF.

Beweis.

Wenn man die Parallelepipeden BJ und EN vollendet, so ist, weil die gegebenen Pyramiden einander ähnlich sind,

∢ BCA = ∢ EFD (XI, 9. Erkl.) Ferner

∢ ACG = ∢ DFH und

$\measuredangle$ BCG = $\measuredangle$ EFH. Daher

BC : EF = AC : DF = GC : HF. Daher ist

CM $\sim$ FQ (VI, 1. Erkl.) Ferner

CJ $\sim$ FN und

CL $\sim$ FP.

Es sind aber in jeder der beiden Parallelopipeden die, den ebengenannten Seitenflächen gegenüberstehenden ihnen gleich und ähnlich (XI, 24. S.) Daher ist auch

BJ $\sim$ EN (XI, 9. Erkl.) und daher

BJ : EN = (BC : EF)^3.

Da ein Prisma die Hälfte des ihm zugehörigen Parallelopipedums und eine Pyramide der dritte Theil des ihr zugehörigen Prisma ist, so muß auch die Pyramide der sechste Theil des ihr angehörigen Parallelopipedums seyn, und man hat auch

Pyr. ABCG : Pyr. DEFH = BJ : EN = (BC : EF)^3.

Zusatz.

Hieraus folgt, daß auch ähnliche vieleckige Pyramiden im dreifach höheren Verhältnisse ihrer homologen Seiten stehen. Denn wenn man die vieleckigen Pyramiden durch Ebenen, welche durch ihre Spitze und durch homologe Diagonalen ihrer Grundflächen gehen, in dreieckige Pyramiden verwandelt (VI, 20. S.), so verhalten sich alle dreieckige Pyramiden in der einen zu allen dreieckigen der andern, d. h. es verhält sich die eine vieleckige Pyramide zur andern, wie eine dreieckige Pyramide in der einen sich zur homologen in der andern verhält. Es stehen aber die dreieckigen Pyramiden im dreifach höheren Verhältnisse ihrer homologen Seiten, daher auch die vieleckigen.

Der 9. Satz.

Lehrsatz.

Wenn dreieckige Pyramiden einander gleich sind, so stehen ihre Grundflächen im umgekehrten Verhältnisse ihrer Höhen, und wenn sich ihre

Grundflächen umgekehrt, wie ihre Höhen verhalten, so sind die Pyramiden einander gleich.

Wenn (Fig. 213.) ABCG und DEFH zwei gleiche dreieckige Pyramiden sind, so stehen ihre Grundflächen ABC und DEF im umgekehrten Verhältnisse ihrer Höhen, und wenn dieses letztere ist, so hat auch das erstere Statt.

Beweis.

Man vollende die Parallelopipeden BJ und EN, welche mit den gegebenen Pyramiden gleiche Höhen haben.

I. Wenn nun Pyr. ABCG = Pyr. DEFH, so ist auch, weil die Pyramide der sechste Theil des ihr zugehörigen Parallelopidedums ist, BJ = EN. Folglich stehen die Grundflächen BK und EM (XI, 34. S.) und daher auch die Dreiecke ABC und DEF (I, 34. S.) im umgekehrten Verhältnisse der Höhen.

II. Wenn aber die Grundflächen ABC und DEF, folglich auch BK und EM (I, 34. S.) sich umgekehrt, wie die Höhen der beiden Pyramiden verhalten, so muß auch das Parallelopipedum BJ dem Parallelopipedum EN gleich seyn. (XI, 34. S.) Da aber die Pyramide der sechste Theil des ihr angehörigen Parallelopipedums ist, so muß auch die Pyramide ABCG der Pyramide DEFH gleich seyn.

Der 10. Satz.

Lehrsatz.

Der Kegel ist der dritte Theil jenes Cylinders, welcher mit ihm Grundfläche und Höhe gemein hat.

Es sei (Fig. 214.) der Kreis ABCD sowohl die Grundfläche des Kegels, als jene des Cylinders, welcher mit ihm die Höhe gemein hat, so ist jener der dritte Theil von diesem.

Beweis.

Wenn der Kegel der dritte Theil des Cylinders nicht wäre, so muß derselbe entweder größer oder kleiner seyn, als dieser dritte Theil.

I. Es sei Keg. $<$ $\frac{1}{3}$ Cyl. oder 3 Keg. $<$ Cyl. d. h. Cylinder $=$ 3 Keg. $+$ X.

Man beschreibe in den Kreis, welcher die gemeinschaftliche Grundfläche des Cylinders und des Kegels ist, das Quadrat ABCD, halbire die Bogen AB, BC, CD und DA in den Puncten E, F, G und H, ziehe die geraden AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH und HA, und denke sich durch alle Theilungspuncte die Tangenten nebst den verlängerten Seiten des innern Quadrates. Hier ist nun das innere Quadrat die Hälfte des äussern (XII, 2. S.) und jedes Dreieck, wie AEB, der Hälfte seines Parallelogramms gleich. Denkt man sich nun auf die hier entstandenen Figuren Prismen von der Höhe des Cylinders beschrieben, welche sich daher, wie ihre Grundflächen verhalten, so ist:

1) Das Prisma auf dem innern Quadrate die Hälfte des Prisma auf dem äusseren Quadrate, und daher größer als die Hälfte des Cylinders, und

2) das Prisma auf jedem Dreiecke, wie AEB, ist die Hälfte jenes Prisma, welches sich auf dem ihm zugehörigen Parallelogramme befindet, und folglich ebenfalls größer, als die Hälfte des Abschnitts vom Cylinder, dessen Grundfläche der Abschnitt BEA ist.

Setzt man nun diese hier angefangene Theilung immer weiter fort, so bleiben einmal Abschnitte vom Cylinder übrig, welche zusammen kleiner sind als jede Größe X. Gesetzt, dies sei geschehen, so ist, weil

Cylinder $=$ 3 Keg. $+$ X, nun auch

das Prisma von der Höhe des Cylinders, dessen Grundfläche von der Höhe des Cylinders, dessen Grundfläche das Vieleck AEBFCGDH ist, größer als 3 Keg. Allein eine Pyramide von gleicher Höhe und Grundfläche ist der dritte Theil des Prisma (XII, 7. S.) Folglich wäre diese Pyramide größer als ein Kegel von der nämlichen Höhe und von der Grundfläche ABCD, d. h. ein Theil wäre größer als das Ganze, was unmöglich ist.

II. Es sei Keg. > $\frac{1}{3}$ Cyl. und folglich Keg. = $\frac{1}{3}$ Cyl. + X, so mache man auf gleiche Weise, wie bei dem ersten Falle vom Cylinder Abschnitte gemacht worden sind, auch hier solche Abschnitte vom Kegel, welche aus denselbigen Gründen zusammengenommen kleiner sind, als jede Größe X. Daher ist aus gleichen Gründen die Pyramide von der Höhe des Cylinders, welche zur Grundfläche das Vieleck AEBFCGDH hat größer, als ein Drittheil des Cylinders. Da aber (nach XII, 7. S.) ein Prisma von der nämlichen Höhe und Grundfläche dreimal so groß, als diese Pyramide ist, so müßte auch dieses Prisma größer, als der Cylinder, d. h. der Theil müßte größer als das Ganze seyn, welches unmöglich ist.

Der 11. Satz.

Lehrsatz.

Wenn Kegel oder Cylinder einerlei Höhen haben, so verhalten sie sich wie ihre Grundflächen.

Wenn (Fig. 215.) sich über den Grundflächen ABCD und EFGH Kegel oder Cylinder befinden, welche einerlei Höhe JK = LM haben, so verhalten sie sich gegen einander, wie die ebengenannten Grundflächen.

Beweis.

Da ein Cylinder dreimal so groß ist, als ein Kegel, welcher mit ihm Grundfläche und Höhe gemein hat (XII, 10. S.) so stehen auch alle Cylinder im geraden Verhältnisse solcher Kegel, welche mit ihnen einerlei Grundflächen und Höhen haben. Wenn daher der obige Lehrsatz von den Kegeln bewiesen ist, so muß er auch von den Cylindern bewiesen seyn.

Wenn nun die Proportion

Kr. ABCD : Kr. EFGH = Keg. AK : Keg. EM

nicht Statt hätte, so setze man

Kr. ABCD : Kr. EFGH = Keg. AK : X, und es muß der Körper X entweder größer oder kleiner, als der Kegel EM seyn.

I. Es sei nun

Kr. ABCD : Kr. EFGH = Keg. AK : X und X < Keg. EM.

Wenn man die nämliche Construction wie in dem unmittelbar vorhergegangenen Satze ausführt, so ist auch hier die Pyramide FM, deren Spitze in M und deren Grundfläche das Vieleck HNEFPGQ ist, größer als X. Nun beschreibe man in den Kreis ABCD ein Polygon DRASBTCV, welches dem ebengenannten Vielecke HNEFPGQ ähnlich ist, und errichte auf dasselbe eine Pyramide BK, deren Spitze in K ist, und welche demnach mit der vorigen Pyramide gleiche Höhe hat.

Da sich nun diese Vielecke sowohl, als die Kreise, worin sie beschrieben sind, wie die Quadrate ihrer Durchmesser verhalten, (XII, 1. u. 2. S.) und die Pyramiden, welche hier entstehen, im geraden Verhältnisse ihrer Grundflächen sind (XXII, 6. S.) so ist

Pyr. BK : Pyr. FM = Kr. ABCD : Kr. EFGH.

Es war aber nach der Annahme

Kr. ABCD : Kr. EFGH = Keg. AK : X, daher ist

Keg. AK : X = Pyr. BK : Pyr. FM. Es ist aber offenbar Keg. AK > Pyr. BK, daher auch

X > Pyr. FM, welches dem zuvor Bewiesenen, Pyr. FM > X widerspricht.

Es ist daher unmöglich, daß

Kr. ABCD : Kr. EFGH = Keg. AK : X sei, wenn X < Keg. EM ist.

Aus eben diesen Gründen ist es auch unmöglich, daß Kr. EFGH : Kr. ABCD = Keg. EM : Y, wenn Y < Keg. AK ist.

II. Es sei nun

Kr. ABCD : Kr. EFGH = Keg. AK : X, so daß X > Keg. EM ist.

Hier ist auch

Kr. EFGH : Kr. ABCD = X : Keg. AK. Nun mache man

X : Keg. AK = Keg. EM : Y, so daß, weil

X > Keg. EM, nun auch

Keg. AK > Y ist. Daher ist auch

Kr. EFGH : Kr. ABCD = Keg. EM : Y, welches aber, weil Y < Keg. AK, nach dem ersten Falle unmöglich ist.

Der 12. Satz.

Lehrsatz.

Aehnliche Kegel und Cylinder stehen im dreifach höhern Verhältnisse der Durchmesser ihrer Grundflächen.

Es befinden sich (Fig. 216.) über den Kreisen ABCD und EFGH ähnliche Kegel oder Cylinder, so stehen sie im dreifach höhern Verhältnisse der Durchmesser BD und FH.

Beweis.

Es seien über den ebengenannten Grundflächen dieser Körper die Linien JK und LM ihre Axen. Da nun jeder Cylinder dreimal so gros ist, als ein Kegel von der nämlichen Grundfläche und Höhe (XII, 10. S.) so verhalten sich auch die Cylinder eben so, wie die Kegel.

Hätte nun die Proportion

$(BD : FH)^3 =$ Keg. BK : Keg. FM nicht Statt, so sei

$(BD : FH)^3 =$ Keg. BK : N, so muß der Körper N entweder größer oder kleiner seyn, als der Kegel FM.

I. Es sei nun

$(BD : FH)^3 =$ Keg. BK : N, und zugleich N $<$ Keg. FM.

Wenn man in dem Kreise EFGH die nämliche Construction, wie in dem zehnten Satze ausführt, so muß auch hier die Pyramide GM, deren Spitze in M und deren Grundfläche das Vieleck EOFPGQHR ist, größer als N seyn. Man beschreibe in den Kreis ABCD ein Vieleck ASBTCVDX, welches dem Vorigen EOFPGQHR ähnlich ist, und errichte auf dasselbe eine Pyramide CK, deren Spitze in K ist. Es sei eine Seitenfläche der Pyramide CK das Dreieck BSK und die ihr homologe Seitenfläche der Pyramide GM das Dreieck OFM. Zieht man nun die Linien SJ und OL, so sind die dreieckigen Pyramiden BJSK und FLOM einander ähnlich (XI, 9. Erkl.) weil sie von gleich vielen, einander ähnlichen Seitenflächen begränzt werden, denn

1. Da BJ = JS und FL = LO, so ist

BJ : JS = FL : LO. Da aber auch

∢ BJS = ∢ FLO, wegen Aehnlichkeit der Vielecke, so ist auch das Dreieck BJS dem Dreiecke FLO ähnlich. (VI, 6. S.)

2. Da nun auch der Kegel BK dem Kegel FM ähnlich ist, so ist auch

KJ : ML = BD : FH = JB : LF (XI, 24. Erkl.)

Daher KJ : JB = ML : LF. Da ferner

∢ BJK = ∢ FLM = R, so ist auch

△ BKJ ∾ △ FML (VI, 6. S.)

3. Da KJ : JB = ML : LF und

JB = JS, auch LF = LO, so ist

KJ : JS = ML : LO. Es ist aber auch

∢ SJK = ∢ OLM = R, daher auch

△ SKJ ∾ △ OML. (VI, 6. S.)

4. Da nun △ BKJ ∾ △ FML und

△ BJS ∾ △ FLO, so ist

KB : BJ = MF : FL (VI, 1. Erkl.) und

BJ : SB = FL : OF.

Folglich auch KB : SB = MF : FO.

Weil nun △ SKJ ∾ △ OML und

△ BJS ∾ △ FLO, so ist

KS : SJ = MO : OL und

SJ : SB = OL : OF. Daher auch

KS : SB = MO : OF.

Werden nun die beiden Proportionen mit einander verglichen, so erhält man

KS : KB = MO : MF, daher ist

△ BKS ∾ △ FMO (VI, 5. S.)

Da also, nach dem so eben Bewiesenen, die Pyramide BJSK der Pyramide FLOM ähnlich ist, so ist auch

Pyr. BJSK : Pyr. FLOM = $(BJ : FL)^3$ = $(BD : FH)^3$ (XII, 8. S.) Wenn man nun von allen Puncten des Umkreises, wie von S und O, gerade Linien nach den Mittelpuncten J und L zieht, und auf die hiedurch entstehenden Dreiecke Pyramiden stellt, deren Spitzen in K und in M sind, so muß aus gleichen Gründen das Verhältniß $(BD : FH)^3$

von jedem zusammengehörigen Paare dieser Pyramiden gelten. Nun verhält sich aber eine Pyramide BJSK bei dem ersten Kreise zu einer Pyramide FLOM bei dem zweiten Kreise, wie alle Pyramiden beim ersten Kreise zu allen Pyramiden beim zweiten, d. h. wie die ganze Pyramide CK zur ganzen Pyramide GM.

Daher ist

$(BD : FH)^3$ = Pyr. CK : Pyr. GM. Es war aber

$(BD : FH)^3$ = Keg. BK : N nach der Annahme.

Folglich ist auch

Keg. BK : N = Pyr. CK : Pyr. GM. Es ist aber offenbar Keg. BK > Pyr. CK, daher auch

N > Pyr. GM, welches dem vorher Bewiesenen, daß Pyr. GM > N ist, widerspricht.

Es ist daher unmöglich, daß die Proportion

$(BD : FH)^3$ = Keg. BK : N Statt finde, wenn

N < Keg. FM ist. Aus eben diesen Gründen ist es auch unmöglich, daß

$(FH : BD)^3$ = Keg. FM : Z sei, wenn Z < Keg. BK ist.

II. Nun sei

$(BD : FH)^3$ = Keg. BK : N, so daß

N > Keg. FM sei. Hier ist auch

$(FH : BD)^3$ = N : Keg. BK. Nun mache man

N : Keg. BK = Keg. FM : Z, so daß,

weil N > Keg. FM, auch Keg. BK > Z ist. Hier wäre

$(FH : BD)^3$ = Keg. FM : Z, welches aber, weil

Z < Keg. BK ist, nach dem ersten Falle nicht seyn kann.

Der 13. Satz.

Lehrsatz.

Wenn ein Cylinder durch eine Ebene mit seinen einander gegenüberliegenden Grundflächen parallel durchschnitten wird, so verhalten sich die beiden hiedurch entstehenden kleineren Cylinder wie ihre Axen.

Es sei (Fig. 217.) AD der gegebene Cylinder, welcher durch HG, parallel mit BA und DC, durchschnitten wird, so verhält sich

AH : GD = EJ : JF.

Beweis.

Man verlängere die Axe EF über F und E, nehme

EM = MK = JE und

FN = NL = JF, und lege durch M und K sowohl, als durch N und L Ebenen, welche den Grundflächen AB und CD parallel und gleich sind, und vollende die Cylinder.

Da die Axen beiderseits gleich sind, so verhalten sich die neu entstandenen Cylinder, da sie einerlei Höhe haben, wie ihre Grundflächen (XII, 11. S.) Da aber auch diese Grundflächen einander gleich sind, so sind auch die Cylinder HA, AR und RO, sowie auch die Cylinder HC, CT und TV unter sich gleich. Daher ist

KJ von EJ das ebenso Vielfache als OH von AH ist, und JL ist von JF auch das ebenso Vielfache, als GX von GD ist. Folglich sind KJ und OH von EJ und AH, so wie auch JL und GX von JF und GD gleich Vielfache. Daher ist, wenn KJ > JL, auch OH > GX.

Wenn KJ = JL, auch OH = GX und wenn

KJ < JL, auch OH < GX. Folglich ist

EJ : JF = AH : GD.

Der 14. Satz.

Lehrsatz.

Wenn Kegel und Cylinder gleiche Grundflächen haben, so verhalten sie sich wie ihre Höhen.

Es haben (Fig. 218.) die Kegel ABG und CDJ, wie auch die Cylinder EB und FD gleiche Grundflächen AB und CD, so verhalten sie sich wie ihre Höhen GH und JK.

Beweis.

Da jeder Kegel der dritte Theil des ihm zugehörigen Cylinders ist, (XII, 10. S.) so verhalten sich auch die Kegel

wie die ihnen zugehörigen Cylinder. Wird nun die JK nach M verlängert, KM = GH gemacht, und der Cylinder DL vollendet, so ist derselbe dem Cylinder EB gleich, weil beide Grundfläche und Höhe gemein haben. (XII, 11. S.) Nun ist aber (XII, 13. S.)

KM : JK = DL : FD, folglich auch
GH : JK = EB : FD.

Der 15. Satz.

Lehrsatz.

Wenn Kegel oder Cylinder einander gleich sind, so stehen ihre Grundflächen im umgekehrten Verhältnisse ihrer Höhen, und wenn bei diesen Körpern die Grundflächen sich umgekehrt, wie ihre Höhen verhalten, so sind sie einander gleich.

Es seien (Fig. 219.) die Kegel ACK und EGM oder die Cylinder AN und EO einander gleich, so ist

AC : EG = LM : JK und wenn
AC : EG = LM : JK ist, so muß auch
Keg. ACK = Keg. EGM und Cyl. AN = Cyl. EO seyn.

Beweis.

Es ist klar, daß man diesen Beweis nur von den Cylindern zu führen braucht.

I. Wenn die Cylinder AN und EO einander gleich sind, so sind ihre Höhen JK und LM entweder einander gleich oder ungleich.

Wenn JK = LM ist, so muß auch
AN : EO = AC : EG seyn. (XII, 11. S.) Es ist aber
AN = EO, folglich auch AC = EG und daher
AC : EG = LM : JK.

Wenn aber LM > JK ist, so nehme man LP = JK und lege durch P eine Ebene TR mit den Grundflächen EG und QO parallel. Da nun AN = EO, so ist auch

AN : ER = EO : OR. Es ist aber
JK = LP und TR mit den beiden Grundflächen gleichlaufend. Daher hat man

AN : ER = AC : EG (XII, 11. S.) und
EO : ER = LM : LP (XII, 13. S.) Daher ist
AC : EG = LM : LP = LM : JK.

II. Wenn aber AC : EG = LM : JK ist, so hat man nach der vorigen Construction
AC : EG = LM : LP. Es ist aber
AC : EG = AN : ER (XII, 11. S.) und
LM : LP = EO : ER (XII, 13. S.) Daher auch
AN : ER = EO : ER und folglich
AN = EO.

Der 16. Satz.

Aufgabe.

Wenn zwei concentrische Kreise gegeben sind, so soll in den größern ein Vieleck von gerader Seitenzahl so beschrieben werden, daß es den kleinern Kreis nicht berührt.

Es seien (Fig. 220.) die zwei concentrischen Kreise ABCD und EFGH und es soll in den größeren das verlangte Vieleck so beschrieben werden, daß es den kleinern Kreis EFGH nicht berührt.

Auflösung und Beweis.

Man ziehe den Durchmesser BD und errichte aus G die AC senkrecht auf denselben, welche für den kleinern Kreis EFGH eine Tangente ist. (III, 16. S.) Man theile die Peripherie BAD durch fortgesetzte Halbirungen, so erhält man einmal einen Bogen JD, welcher kleiner ist als der Bogen AD. Man ziehe aus J die JKL auf BD lothrecht, und die geraden Linien JD und DL, so ist JD = DL und JL mit AC parallel. Daher berührt die Linie AC, aber nicht die JL und noch weniger die Linie JD oder DL den kleineren Kreis. Trägt man nun in den größeren Kreis gerade Linien, welche der JD gleich sind, so entsteht ein Vieleck von gleicher Seitenzahl in diesem Kreise ABCD, welches den kleinern Kreis EFGH nicht berührt.

Der 17. Satz.

Aufgabe.

Wenn zwei concentrische Kugeln gegeben sind, so soll in die größere ein vieleckiger Körper (Polyeder) so beschrieben werden, daß er die Oberfläche der kleinern Kugel nicht berührt.

Erster Theil.

Dieser erste Theil zeigt, wie man das verlangte Polyeder construiren soll. Wenn beide Kugeln durch ihren gemeinschaftlichen Mittelpunct A (Fig. 221.) von einer Ebene durchschnitten worden, so entsteht hiedurch auf der Oberfläche der beiden Kugeln ein Kreis (XI, 14. Erkl.) und zwar ein größter Kreis (III, 15. S.); in der größern Kugel sei es der Kreis BCDE, und in der kleinern der Kreis FGH. Man ziehe in diesen zwei Kreisen die Durchmesser DB und CE lothrecht auf einander, beschreibe in den größeren Kreis BCDE ein Vieleck von einer geraden Zahl gleicher Seiten, welches den kleinern concentrischen Kreis FGH nicht berührt. (XII, 16. S.) In dem Quadranten BE seien die Linien BJ, JK, KL und LE die Seiten dieses Vielecks. Man ziehe die gerade JA, verlängere sie bis M, errichte in A die AN auf der Ebene des Kreises BCDE lothrecht, welche die Oberfläche der größeren Kugel in N trifft, lege durch AN und jeden der beiden Durchmesser DB und JM Ebenen, welche ebenfalls, nach dem bereits Erwiesenen, auf der Oberfläche der Kugel größte Kreise bilden werden. Die Hälften dieser größten Kreise seien BND und JNM, welche, so wie AN, auf der Ebene BCDE senkrecht stehen (XI, 18. S.)

Da nun BD = JM = CE, so sind die halben Kreise BNDJNM und BED und daher auch die Quadranten BN, JN und BE einander gleich. So viele Seiten daher das Vieleck in BE hat, ebenso viele von gleicher Größe können auch in BN und JN seyn. Man beschreibe dieselben, nämlich BO, OP, PQ und QN in BN, ferner JR, RS, ST und TN in JN und ziehe die Verbindungslinien RO, SP und TQ, welche mit JB parallel seyn werden. Denn wenn man von O und R auf die

Ebene BCDE die Lothe OV und RX zieht, welche die Durchschnittslinien BD und JM treffen (XI, 38. S.) und man zieht noch die Linie VX, so ist, weil auch BND = JNM und BO = JR, nun auch OV = RX (I, 26. S.) und BV = JX. Da nun auch AB = AJ, so ist VX mit JB parallel (VI, 2. S.) Weil aber OV und RX einander gleich und parallel sind, (XI, 6. S.) so ist auch VX mit RO parallel (I, 33. S.) und daher auch RO mit JB gleichlaufend (XI, 9. S.) Ebenso wird nun auch bewiesen, daß SP mit RO und TQ mit SP parallel sei.

Da nun RO mit JB gleichlaufend ist, so liegt die vierseitige Figur JBOR in einer Ebene (XI, 7. S.) und aus gleichem Grunde liegt auch jede der übrigen ROPS, ferner SPQT und das Dreieck TQN, einzeln genommen, in einerlei Ebene. (XI, 2. S.)

Denkt man sich von den Puncten O und R, P und S, Q und T nach dem Mittelpuncte der Kugel A gerade Linien, so entsteht zwischen den beiden Quadraten BN und JN ein polyedrischer Körper, welcher aus Pyramiden zusammengesetzt ist, deren Grundflächen die Figuren JBOR, ROPS, SPQT, TQN sind, und deren Scheitel im Puncte A ist. Wird nun im Quadranten BE auf jeder der Seiten JK, KL und LE eine ähnliche Construction ausgeführt, wie auf BE und in der andern Halbkugel wiederum eine ähnliche, wie in dieser Halbkugel, so entsteht in der größern Kugel ein Polyeder, welches aus lauter Pyramiden von der oben bemerkten Art zusammengesetzt ist.

Zweiter Theil.

Dieser zweite Theil muß beweisen, daß das zuvor beschriebene Polyeder die Oberfläche der kleinern Kugel nicht berührt. Man ziehe von A das Loth AZ auf die Ebene JBOR und in dieser Ebene die geraden Linien ZJ, ZB, ZO und ZR, auf welchen AZ ebenfalls senkrecht steht. (XI, 3. Erkl.) Da nun AB = AJ, und in den rechtwinkeligen Dreiecken AZB und AZJ das Quadr. AB = Quadr. AZ + Quadr. ZB (I, 47. S.) und Quadr. AJ = Quadr. AZ + Quadr. ZJ, so muß auch ZB = ZJ seyn. Auf gleiche Art wird bewiesen, daß auch

ZO = ZB, und ZR = ZJ sei. Daher muß ein aus Z mit ZB beschriebener Kreis durch die vier Puncte J, B, O und R gehen, wodurch JBOR eine vierseitige Figur in diesem Kreise ist. Nun ist aber

BJ = JR = BO, aber

BJ > VX, daher auch

BJ > RO. Daher ist der Winkel BZJ ein stumpfer und das Quadr. von JB größer als 2 Quadrat von BC. (II, 12. S.)

Nun fälle man von J auf DB das Loth Ja und ziehe DJ. Da nun BD < 2 Da und BD : DA = Recht. aus DB und BA : Recht. aus Da und aB (II, 1. S.) = Quadr. BJ : Quadr. Ja (VI, 8. S.) so ist auch

Quadr. BJ < 2 Quadr. Ja. Es war aber

Quadr. BJ > 2 Quadr. BZ, folglich ist

2 Quadr. BZ < 2 Quadr. Ja, oder auch

Quadr. BZ < Quadr. Ja.

Da nun AB = AJ und auch

Quadr. AB = Quadr. AZ + Quadr. BZ (I, 47. S.)

ferner Quadr. AJ = Quadr. Aa + Quadr. Ja, so ist auch

Quadr. AZ + Quadr. BZ = Quadr. Aa + Q. Ja.

Es war aber Q. BZ < Quadr. Ja, daher ist auch

Quadr. AZ > Quadr. Aa und folglich

AZ > Aa. Also noch vielmehr

AZ > AG.

Ein anderer Beweis.

Daß AZ > AG kann auch so bewiesen werden. Man errichte auf AG in G das Loth GK und ziehe AK. Nun theile man den Bogen BE durch fortgesetzte Halbirungen bis einmal ein Stück, etwa BJ, übrig bleibt, welches kleiner ist, als ein Bogen, dessen Sehne GK wäre (X, 1. S.) Folglich wäre auch die Sehne BJ < GK.

Es ist aber, nach dem zuvor Bewiesenen, der Winkel BZJ ein stumpfer, folglich BZ kleiner, als BJ. Daher ist BZ auch kleiner als GK, oder Quadr. BZ < Quadr. GK.

Da aber AB = AK, und

Quadr. AB = Quadr. AZ + Q. BZ (I, 47. S.) ferner

Quadr. AK = Quadr. AG + Quadr. GK, so ist

Quadr. AZ + Quadr. BZ = Quadr. AG + Quadr. GK.

Es war aber Quadr. BZ < Quadr. GK, folglich ist

Quadr. AZ > Q. AG, und daher AZ > AG

Zusatz.

Wenn in eine andere Kugel B ein Polyeder beschrieben wird, welches dem in die Kugel A beschriebenen Polyeder ähnlich ist, so stehen diese beiden vieleckigen Körper im dreifach höhern Verhältnisse der Durchmesser ihrer Kugeln.

Theilt man diese vieleckigen Körper in gleichviele Pyramiden von einerlei Art, so sind diese Pyramiden einander ähnlich, und stehen daher im dreifach höhern Verhältnisse ihrer homologen Seiten (XII, 8. S.) d. h. eine Pyramide in der Kugel A, deren Grundfläche das Viereck JBOR und deren Scheitel in A ist, steht zu der ihr homologen Pyramide in der Kugel B im dreifach höhern Verhältnisse der Halbmesser, oder der Durchmesser beider Kugeln. Nun ist aber eine Pyramide der Kugel A zu der ihr homologen Pyramide der Kugel B wie alle Pyramiden der Kugel A zu allen homologen Pyramiden der Kugel B, d. h. wie das ganze Polyeder in der Kugel A zu dem ganzen Polyeder in der Kugel B. Daher sind diese vieleckigen Körper selbst im dreifach höhern Verhältnisse der Durchmesser ihrer Kugeln.

Der 18. Satz.

Lehrsatz.

Kugeln stehen im dreifach höhern Verhältnisse ihrer Durchmesser.

Es seien (Fig. 222.) ABC und DEF zwei Kugeln, so sind sie im dreifach höhern Verhältnisse ihrer Durchmesser BC und EF.

Beweis.

Hätte die Proportion

$(BC : EF)^3$ = Kug. ABC : Kug. DEF nicht Statt, so sei

$(BC : EF)^3$ = Kug. ABC : X, und es müßte der Körper X entweder größer, oder kleiner, als die Kugel DEF seyn.

I. Es sei $(BC : EF)^3$ = Kug. ABC : X, so, daß X < Kug. DEF sei.

Man nehme eine Kugel GHJ = X concentrisch mit der Kugel DEF, beschreibe in die Kugel DEF ein Polyeder, welches die Oberfläche der Kugel GHJ nicht berührt, und in die Kugel ABC ein dem vorigen ähnliches Polyeder, so ist

$(BC : EF)^3$ = Polyed. ABC : Polyed. DEF (XII, 17. Zus.)

Es war aber $(BC : EF)^3$ = Kug. ABC : Kug. GHJ, folglich ist

Polyed. ABC : Polyed. DEF = Kug. ABC : Kug. GHJ.

Offenbar ist aber Polyed. ABC < Kug. ABC

daher auch Polyed. DEF < Kug. GHJ, welches offenbar irrig ist.

Es ist daher unmöglich, daß

$(BC : EF)^3$ = Kug. ABC : X , wenn X < Kug. DEF.

Aus eben diesen Gründen ist es auch unmöglich, daß $(EF : BC)^3$ = Kug. DEF : Z, wenn Z < Kug. ABC ist.

II. Es sei nun $(BC : EF)^3$ = Kug. ABC : X, und X > Kug. DEF.

Nun sei X = Kug. KLM, so ist auch

$(EF : BC)^3$ = Kug. KLM : Kug. ABC. Nun sei

Kug. KLM : Kug. ABC = Kug. DEF : Z, so, daß,

weil Kug. KLM > Kug. DEF auch

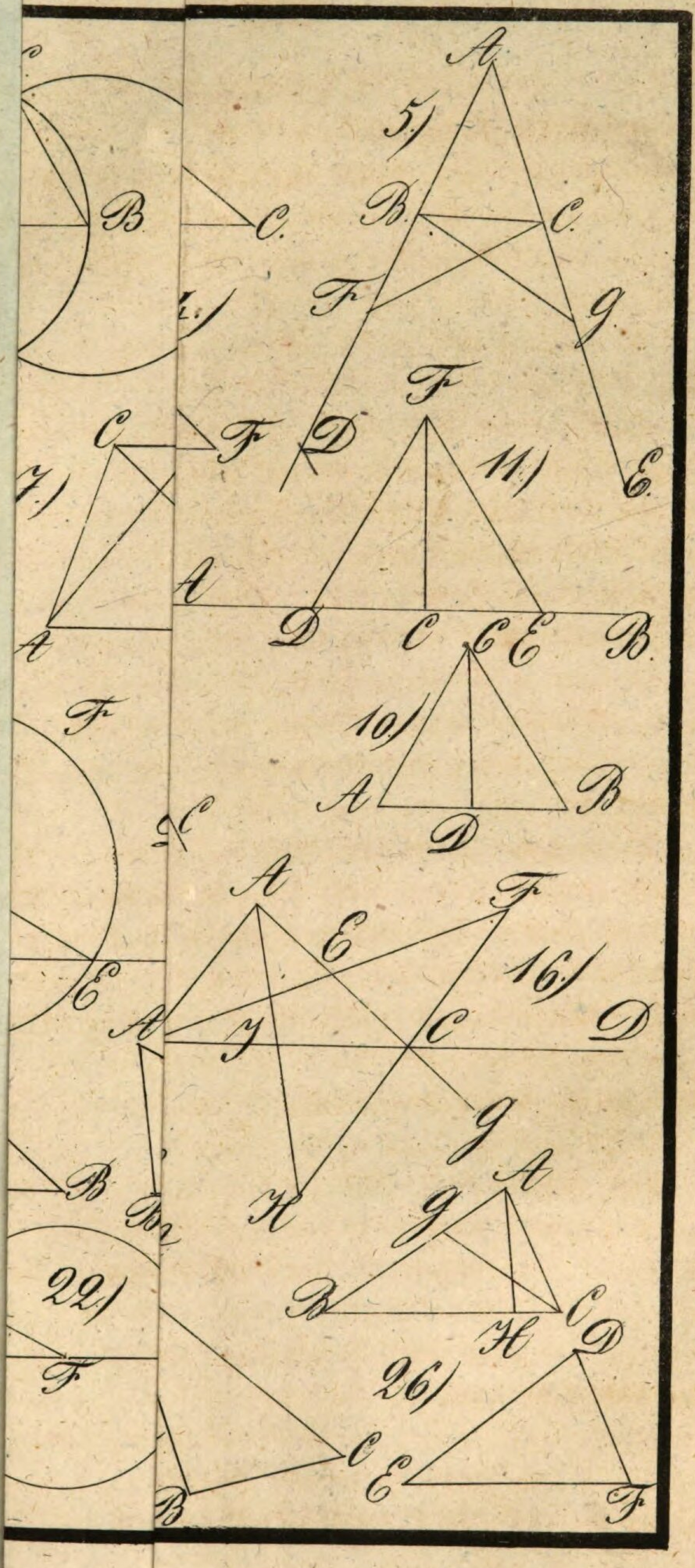
Kug. ABC > Z ist. Folglich ist

$(EF : BC)^3$ = Kug. DEF : Z, welches

aber, weil Z < Kug. ABC ist, nach dem ersten Falle nicht seyn kann.

Ende des zwölften Buches.

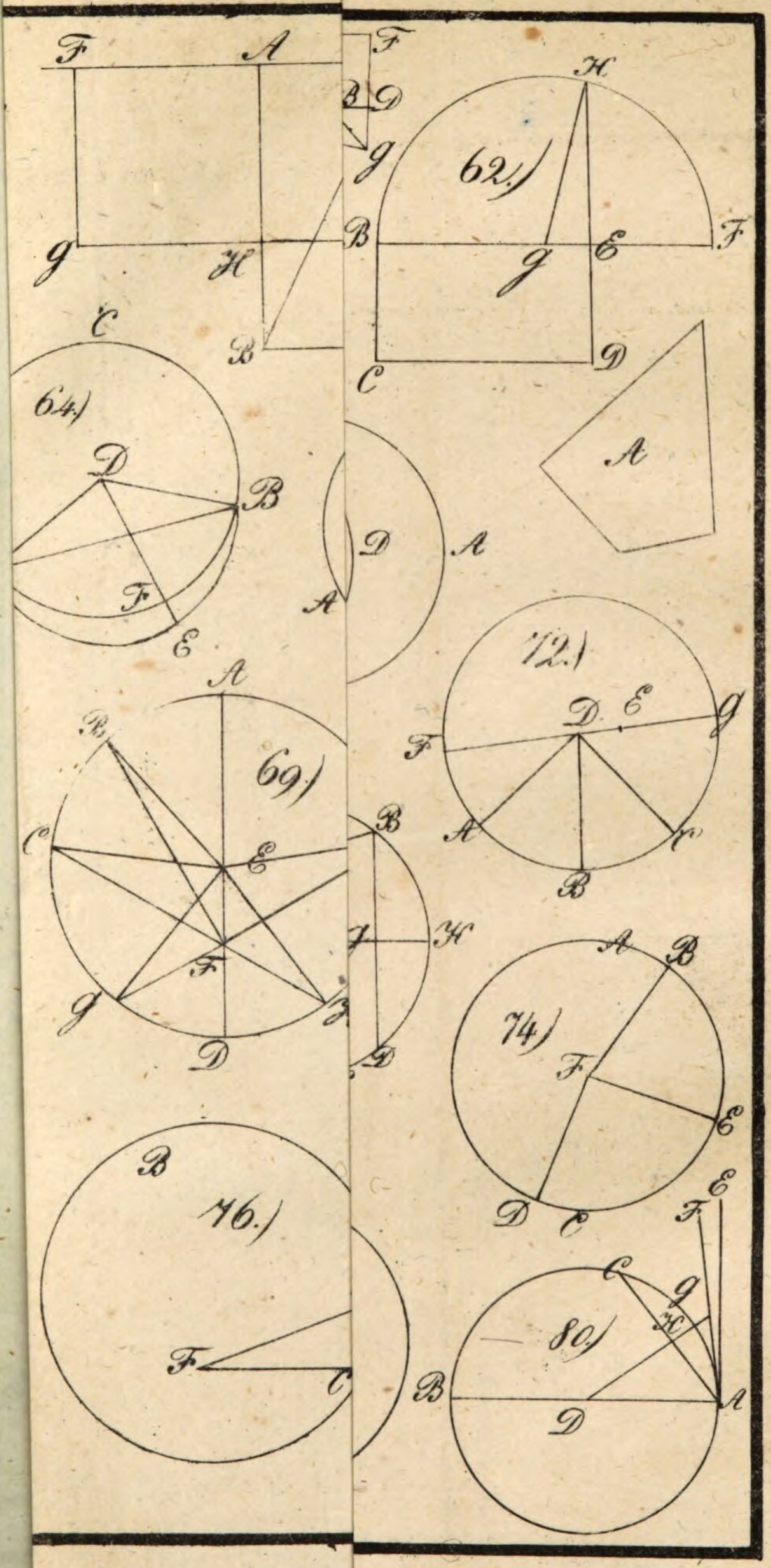
Tafel I.



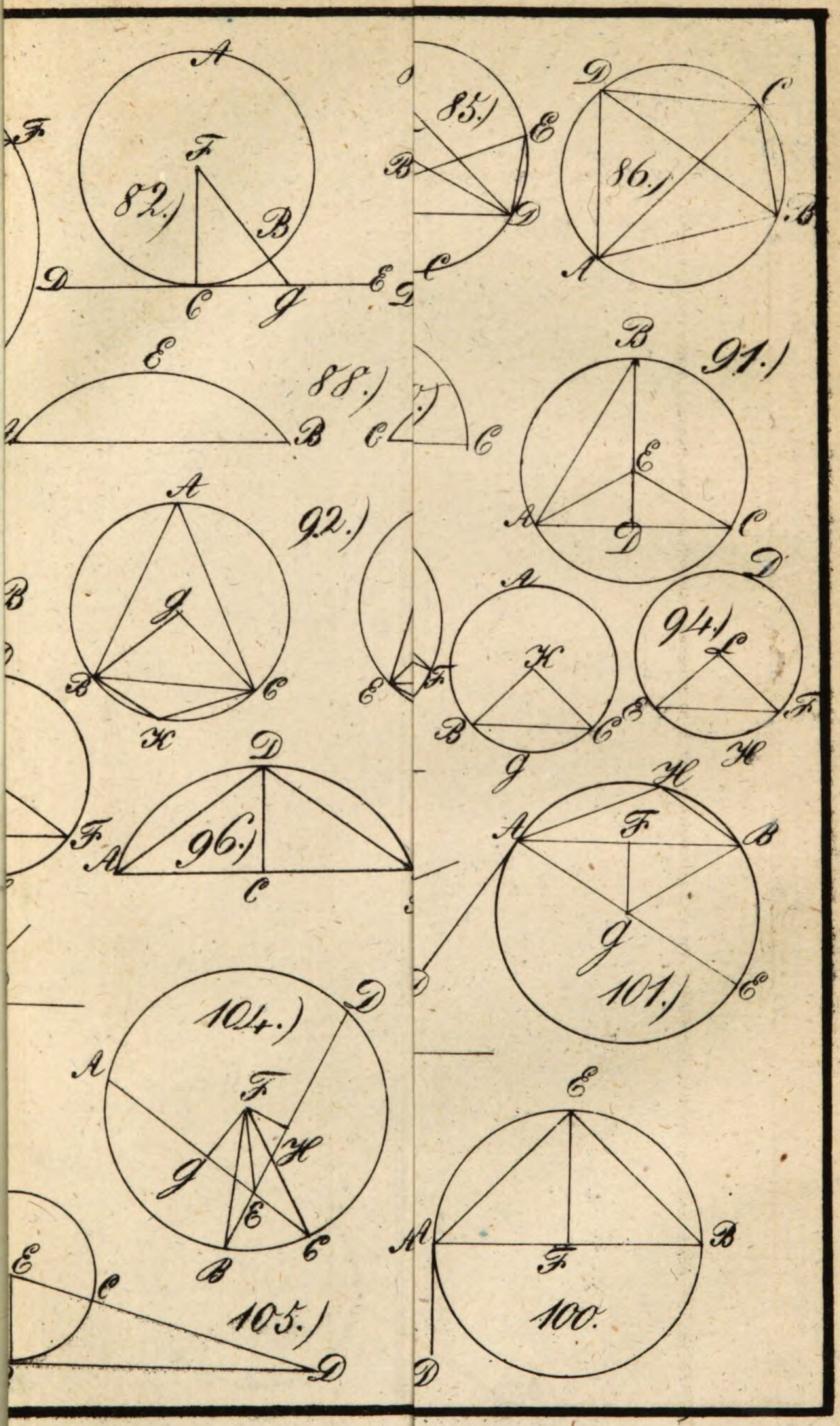
5.)
A.
B.
C.
F.
G.
D
E.
11.)
F
D
C
E
B.
10.)
C
A
B
D
7.)
C
F
A
A
B.
C.
16.)
A
E
F
I
C
D
G
H
A
G
B
C
H
D
26.)
E
F
22.)
F
B
C
B

28.)
31.)
33.)
38.)
41.)
43.)
45.)
47.)
50.)
53.)
55.)

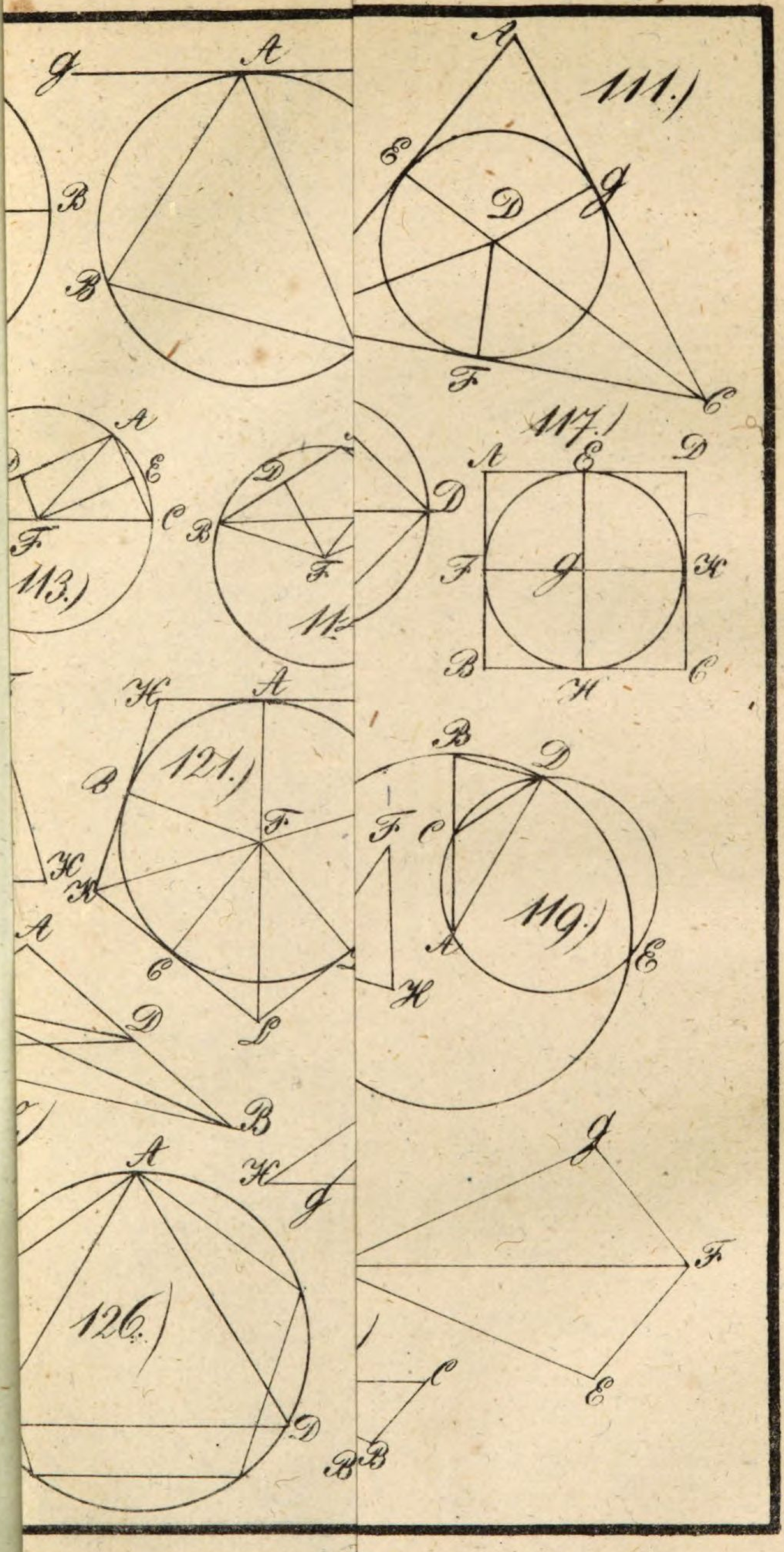
Tafel III.



Tafel IV.



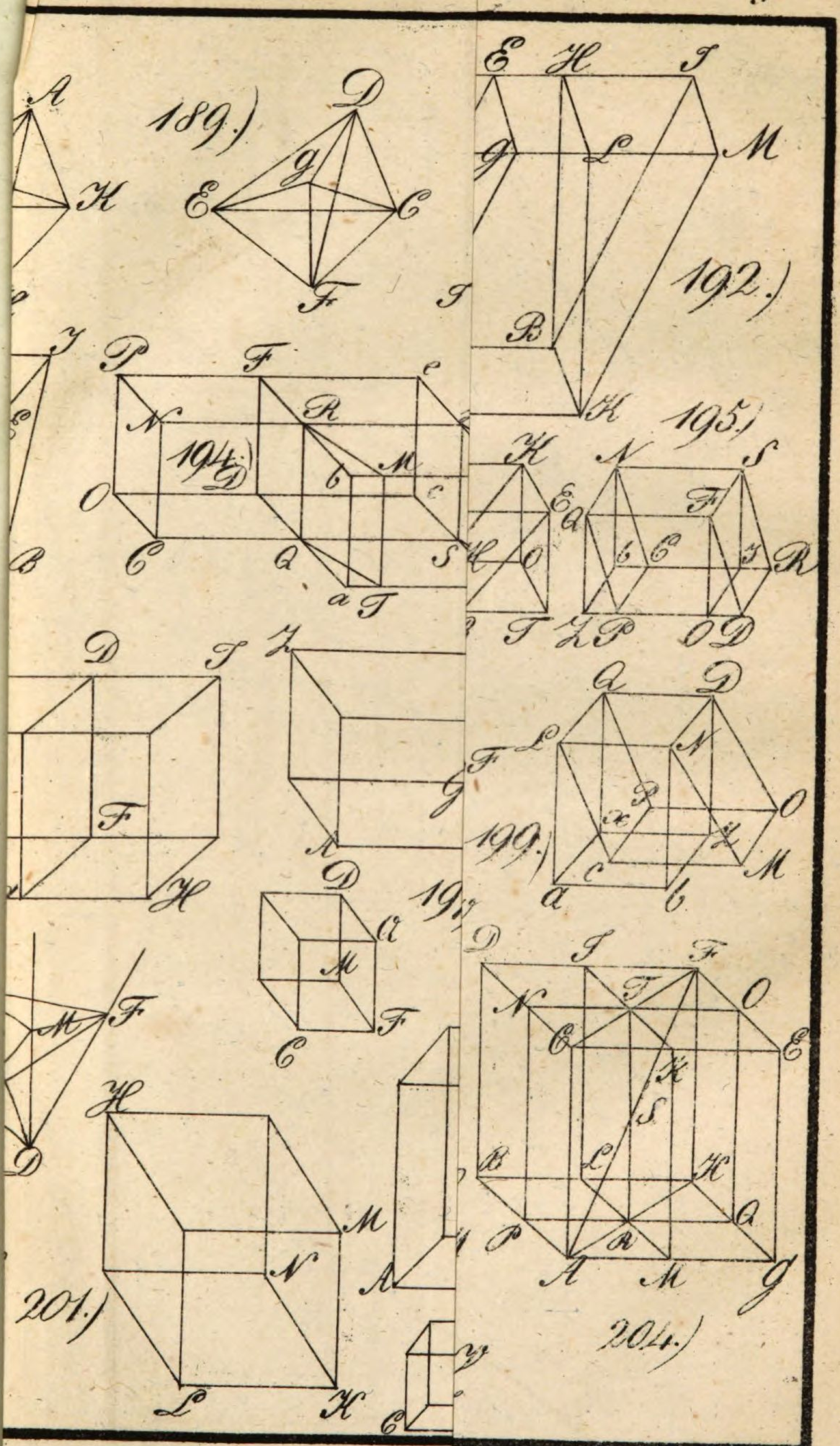
Tafel I.



Zur Geom

Tafel VII

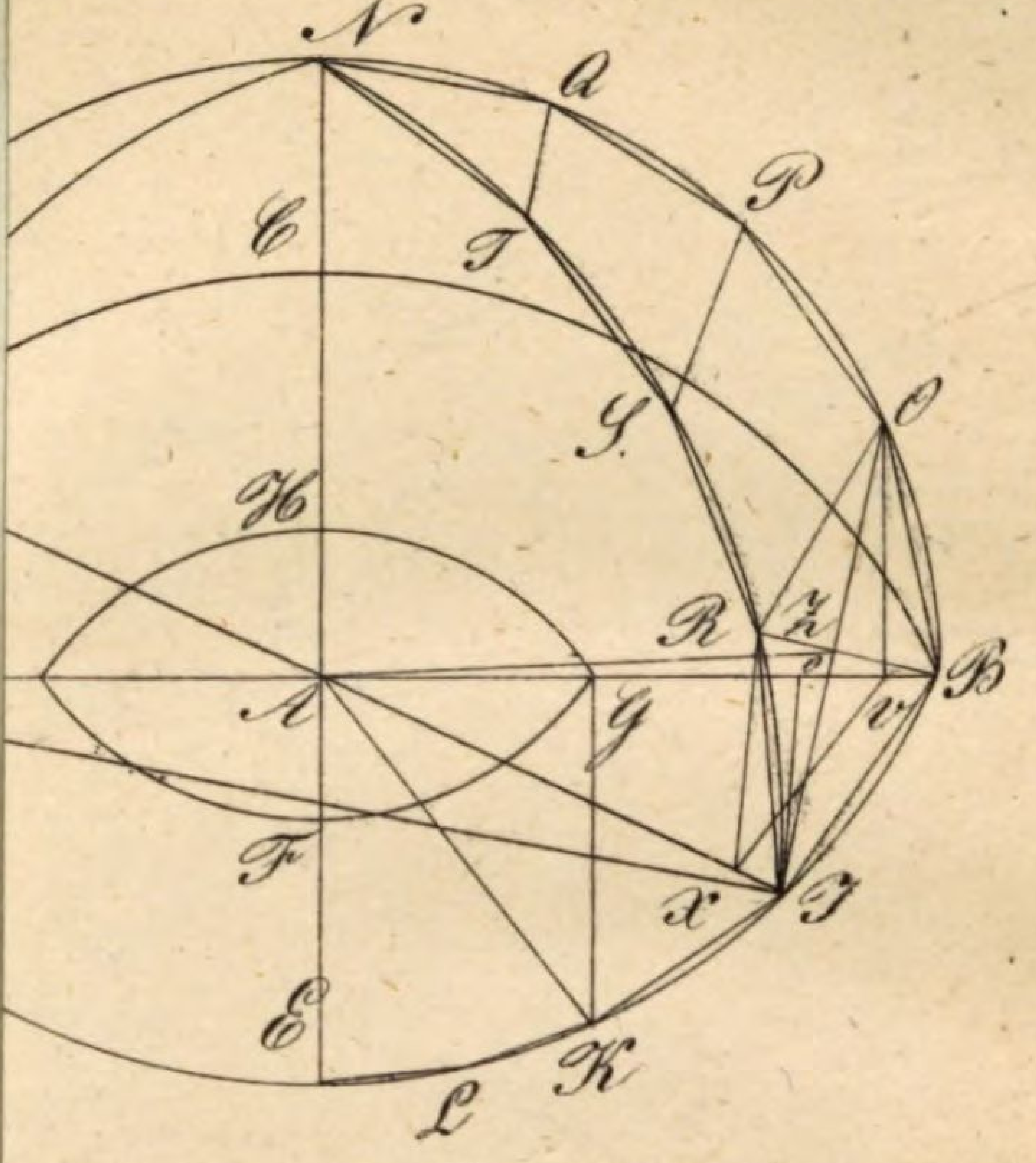
Zur G



Zur Geom

Tafel IX.

Tafel X.



BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Hoffmann, Johann Josef Ignaz <<von>>,

Die Planimetrie und Stereometrie des Euclides; oder die geometrischen Bü
cher der Elemente zum öffentlichen und Privat-Gebrauche

Bd.: [1]

Mainz 1832

A.gr.b. 1446-1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10235935-4